

**Перечень теоретических и практических заданий к экзамену
по ЕН.01 Элементы высшей математики
(2 курс, 4 семестр 2022-2023 уч. г.)**

Форма контроля: Контрольная работа (Опрос)

Описательная часть: экзаменационный билет содержит два теоретических и три практических задания

Перечень теоретических заданий:

Задание №1

Вставьте пропущенные слова в текст:

Вычисление обратных матриц второго и третьего порядка.

Обратную матрицу можно найти только для матрицы, если ее определитель нулю. Для этого нужно использовать следующую схему.

1. Находят определитель матрицы A . Определитель второго порядка находят используя формулу A вот для 3-го порядка используют правило или теорему
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называют этого элемента взятый со знаком.....
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы, другими словами матрицу.
4. Умножают полученную матрицу на..... и получают обратную матрицу которая обозначается символом

Образец выполнения работы:

Вычисление обратных матриц второго и третьего порядка.

Обратную матрицу можно найти только для **КВАДРАТНЫХ** матрицы, если ее определитель **НЕ РАВЕН** нулю. Для этого нужно использовать следующую схему.

1. Находят определитель матрицы A . Определитель второго порядка находят используя формулу **$A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}$** A вот для 3-го порядка используют правило **ТРЕУГОЛЬНИКА** или теорему **О РАЗЛОЖЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ ИЛИ СТОЛБЦА**
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называют **МИНОР** этого элемента взятый со знаком **$(-1)^{i+j}$** .
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы, другими словами **ТРАНСПОНИРУЮТ**

матрицу.

4. Умножают полученную матрицу на $1/D$и получают обратную матрицу которая обозначается символом A^{-1} .

Оценка	Показатели оценки
3	вставлены верно не менее 5 терминов, огласно приведенного образца
4	вставлены верно от 6 до 8 терминов, согласно приведенного образца
5	вставлены верно от 9 до 10 терминов, согласно приведенного образца.

Задание №2

Дайте определение матрицы, запишите общий вид матрицы и опишите элемент матрицы a_{ij} .
Запишите сокращенный вид матрицы.

Оценка	Показатели оценки
3	Воспроизведено определение стр. 53 [1]
4	Воспроизведено определение и записан общий вид стр. 53 [1]
5	Воспроизведено определение что называется матрицей, записан общий вид матрицы дано пояснение что индекс i j означает номер строки, а второй индекс j - номер столбца. Записан сокращенный вид матрицы. $A=(a_{ij})$ стр. 53 [1]

Задание №3

Перечислите виды матриц и дайте их определение. На каждый вид матриц приведите пример и решите

Оценка	Показатели оценки
3	Перечислены виды матриц: Прямоугольная матрица, Квадратная матрица, Диагональная матрица, Скалярная матрица, Единичная матрица, Матрица -строка, Матрица-столбец, Треугольная матрица. Приведены примеры
3	Перечислено не менее четырех видов матриц и даны их определения стр.53-55 [1]. Приведены примеры
4	Перечислены виды матриц такие как: Прямоугольная матрица, Квадратная матрица, Диагональная матрица, Скалярная матрица, Единичная матрица, Матрица -строка, Матрица-столбец, Треугольная матрица и даны их определения стр.53-55 [1]. Приведены примеры
5	Перечислены виды матриц такие как: Прямоугольная матрица, Квадратная матрица, Диагональная матрица, Скалярная матрица, Единичная матрица, Матрица -строка, Матрица-столбец, Треугольная матрица, даны их определения стр.53-55 [1] и приведены примеры.

Задание №4

Вариант 1.

1. Что называется эллипсом?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Вариант 2.

1. Что называется гиперболой?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.
3. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна

Вариант 3.

1. Что называется параболой?
2. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.
3. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Вариант 4.

1. Запишите уравнение окружности.
2. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.
3. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Оценка	Показатели оценки
--------	-------------------

Задание №5

Вариант 1.

1. Что называется эллипсом?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Вариант 2.

1. Что называется гиперболой?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.
3. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна

Вариант 3.

1. Что называется параболой?
2. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.
3. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Вариант 4.

1. Запишите уравнение окружности.
2. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.
3. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Оценка	Показатели оценки
5	Верно выполнена работа в полном объеме, в рассуждениях и обосновании нет неточностей и ошибок.
4	Верно выполнено 3 задания и допущено не более 2 ошибок.
3	Верно выполнено 2 практических задания и допущены ошибки.
3	Верно дан ответ на вопрос теории и выполнено правильно 1 практическое задание

Задание №6

Выполните задание

1 вариант

1) Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

а) Найти $3A - B$

б) Составить определитель матрицы A ($\det A$) и вычислить его, разложив по 2-й строке.

2) Найти все миноры матрицы A и алгебраические дополнения матрицы B .

2 вариант

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

а) Найти матрицу $2A - B$

б) Составить определитель матрицы A ($\det A$) и вычислить его, разложив по его по элементам 3 столбца

2) Найти все миноры матрицы A и алгебраические дополнения матрицы B .

Оценка	Показатели оценки
3	Верно найдена матрица: 1 варианта $3A - B$ (2 вариант $2A - B$)
4	Верно найдена матрица: 1 варианта $3A - B$ (2 вариант $2A - B$) Составлен определитель матрицы A и верно дано разложение по элементам указанной строки (столбца) Найдены миноры матрицы A

5	<p>Верно найдена матрица: 1 варианта 3А-В (2 вариант 2А - В)</p> <p>Составлен определитель матрицы А и верно дано разложение по элементам указанной строки (столбца)</p> <p>Найдены миноры матрицы А и алгебраические дополнения</p>
---	--

Задание №7

Дайте определение следующим терминам:

1. Предел переменной
2. Предел функции
3. Непрерывность функции
 1. в точке
 2. на интервале
4. Замечательные пределы
 1. Первый
 2. Второй
 3. Третий
5. Производная
6. Дифференциал
7. Неопределенный интеграл
8. Формула Ньютона-Лейбница
9. "Неберущиеся" интегралы

Оценка	Показатели оценки
--------	-------------------

Задание №8

Дайте определение следующим терминам:

1. Предел переменной
2. Предел функции
3. Непрерывность функции
 1. в точке
 2. на интервале
4. Замечательные пределы
 1. Первый
 2. Второй
 3. Третий
5. Производная
6. Дифференциал
7. Неопределенный интеграл
8. Формула Ньютона-Лейбница

9. "Неберущиеся" интегралы

Оценка	Показатели оценки
5	<p>Даны правильные определения следующим терминам:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Предел переменной стр. 170 [1] 2. Предел функции стр. 172 [1] 3. Непрерывность функции <ol style="list-style-type: none"> 1. в точке стр. 175 [1] 2. на интервале стр. 175 [1] 4. Замечательные пределы <ol style="list-style-type: none"> 1. Первый стр. 179 [1] 2. Второй стр. 179 [1] 3. Третий стр. 180 [1] 5. Производная стр. 192 [1] 6. Дифференциал стр. 233 [1] 7. Неопределенный интеграл стр. 281 [1] 8. Определенный интеграл стр. 310 [1] 9. "Неберущиеся" интегралы стр. 331 [1]
4	<p>Даны правильные определения следующим терминам:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Предел переменной стр. 170 [1] 2. Предел функции стр. 172 [1] 3. Непрерывность функции <ol style="list-style-type: none"> 1. в точке стр. 175 [1] 4. Замечательные пределы <ol style="list-style-type: none"> 1. Первый стр. 179 [1] 2. Второй стр. 179 [1] 5. Производная стр. 192 [1] 6. Неопределенный интеграл стр. 281 [1] 7. Определенный интеграл стр. 310 [1]
3	<p>Даны правильные определения следующим терминам:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Предел функции стр. 172 [1] 2. Производная стр. 192 [1] 3. Неопределенный интеграл стр. 281 [1] 4. Определенный интеграл стр. 310 [1]

Задание №9

Вычислите следующие пределы

$$\begin{array}{llll}
1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2} & 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 2}{3x^2 + 5x + 2} & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} & 7. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} \\
2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\sin 5x} & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{\sqrt{x+3} - 2}
\end{array}$$

Оценка	Показатели оценки
3	Выполнено 69 - 50 % заданий
4	Выполнено 89 - 70 % заданий
5	Выполнено 90 - 100 % заданий

Задание №10

Вычислите следующие пределы

$$\begin{array}{llll}
1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2} & 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 2}{3x^2 + 5x + 2} & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} & 7. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} \\
2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\sin 5x} & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{\sqrt{x+3} - 2}
\end{array}$$

Оценка	Показатели оценки
--------	-------------------

Перечень практических заданий:

Задание №1

Решите СЛАУ матричным способом, используя формулы Крамера, методом Гаусса.

1 вариант

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

2 вариант

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - 2y + 2z = -5 \\ 7x + y - z = 10 \end{cases}$$

Оценка	Показатели оценки
3	Правильное решение СЛАУ матричным способом.
3	Правильное решение СЛАУ, используя формулы Крамера.
3	Правильное решение СЛАУ, используя метод Гаусса.
3	Правильное применение (не менее 2 методов) алгоритмов решения СЛАУ, допущены ошибки при выполнении расчетов.
4	Правильное применение всех алгоритмов решения СЛАУ, допущены ошибки при выполнении расчетов в 1 методе.
4	Правильное применение всех алгоритмов решения СЛАУ, допущены ошибки при расчетах не влияющие на итоговый результат.
5	Правильное решение СЛАУ всеми 3 способами: матричным способом, используя формулы Крамера, используя метод Гаусса.

Задание №2

Используя схему исследования функции, построить графики функций по вариантам (вариант определяется преподавателем).

1 вариант: $y = x^4 - 2x^2 + 5$

2 вариант: $y = x^5 - 5x^4 + 1$

Оценка	Показатели оценки

5	<p>Полное соблюдение схемы исследования функции, а именно:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Нахождение области определения функции. 2. Исследование функции на четность или нечетность. 3. Нахождение первой производной и определение промежутков знакопостоянства. 4. Нахождение второй производной и определение промежутков монотонности функции, и ее экстремумов. 5. Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции, и точек перегиба. 6. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат. <p>Построение графика функции, с использованием полученных результатов исследования.</p>
4	<p>Соблюдение схемы исследования функции.</p> <p>Неточное построение графика функции, с использованием полученных результатов исследования.</p>
4	<p>Незначительные ошибки в соблюдение схемы исследования функции.</p> <p>Построение графика функции, с использованием полученных результатов исследования.</p>
3	<p>Минимальное соблюдение схемы исследования функции, а именно:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Нахождение области определения функции. 2. Нахождение первой производной, определение промежутков знакопостоянства и экстремумов. 3. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат. <p>Построение графика функции, с использованием полученных результатов исследования.</p>

Задание №3

Найдите площадь фигур, ограниченной данными линиями. Сделайте чертеж.

Вариант 1

Пример: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$, осями координат и прямой $x = 2$.

1.

2. $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$

3. $y = \ln x$ $y = 0$; $x = 1$; $x = e$

Вариант 2

$$y = x^2$$

1. Найдите площадь фигур, ограниченной линиями

$$y = 2 - x^2$$

2. $y = -x^2 - 2x$ и $y = 2x$

3. $y = \sin x$ и $y = 0$; $x = n/4$

Дополнительные задания

1. $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$;

2. $x^2 + y^2 = 2y, y \geq x, x \geq 0$;

3. $(x^2 + y^2)^2 = 4(3x^2 + 2y^2)$;

4. $(x^2 + y^2)^2 = 9(4x^2 + y^2)$;

5. $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^3$;

6. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

Оценка	Показатели оценки
--------	-------------------

Задание №4

Найдите площадь фигур, ограниченной данными линиями. Сделайте чертеж.

Вариант 1

Пример: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$, осями координат и прямой $x=2$.

1.

2. $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$

3. $y = \ln x$ и $y = 0$; $x = 1$; $x = e$

Вариант 2

$$y = x^2$$

1. Найдите площадь фигур, ограниченной линиями

$$y = 2 - x^2$$

2. $y = -x^2 - 2x$ и $y = 2x$

3. $y = \sin x$ и $y = 0$; $x = \pi/4$

Дополнительные задания

1. $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$;
2. $x^2 + y^2 = 2y, y \geq x, x \geq 0$;
3. $(x^2 + y^2)^2 = 4(3x^2 + 2y^2)$;
4. $(x^2 + y^2)^2 = 9(4x^2 + y^2)$;
5. $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^3$;
6. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

Оценка	Показатели оценки
5	<p>Правильно вычислены площади 3-х фигур, согласно алгоритма:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Выполнение схематического чертежа 2. Представление искомой площади как суммы или разности площадей криволинейных трапеций. 3. Определение пределов интегрирования из условий задачи и на основе чертежа 4. Представление каждой функции в виде $y=f(x)$ 5. Вычисление площади каждой криволинейной трапеции и площади искомой фигуры
4	<p>Правильно вычислены площади 2-х фигур, согласно алгоритма:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Выполнение схематического чертежа 2. Представление искомой площади как суммы или разности площадей криволинейных трапеций. 3. Определение пределов интегрирования из условий задачи и на основе чертежа 4. Представление каждой функции в виде $y=f(x)$ 5. Вычисление площади каждой криволинейной трапеции и площади искомой фигуры

3	<p>Вычислена площадь 3-х фигур соблюдается ниже представленный алгоритм вычисления площади, допущены ошибки в расчетах .</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Выполнение схематического чертежа 2. Представление искомой площади как суммы или разности площадей криволинейных трапеций. 3. Определение пределов интегрирования из условий задачи и на основе чертежа 4. Представление каждой функции в виде $y=f(x)$ 5. Вычисление площади каждой криволинейной трапеции и площади искомой фигуры
3	<p>Правильно вычислены площади одной фигуры, согласно алгоритма:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Выполнение схематического чертежа 2. Представление искомой площади как суммы или разности площадей криволинейных трапеций. 3. Определение пределов интегрирования из условий задачи и на основе чертежа 4. Представление каждой функции в виде $y=f(x)$ 5. Вычисление площади каждой криволинейной трапеции и площади искомой фигуры

Задание №5

1. Решите дифференциальное уравнение с разделенными переменными

1. $exdx=ydy$
2. $2ydy=3x^2dx$

2. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

1. $xdy+2ydx=0$
2. $y'+2x^2y'+2xy-2x=0$

3. Решите дифференциальное уравнение, используя схему Бернулли

1. $y'x+2y=x^3$
2. $(1+x^2)y'-xy=2x$

Оценка	Показатели оценки
--------	-------------------

Задание №6

1. Решите дифференциальное уравнение с разделенными переменными

1. $exdx=ydy$

2. $2ydy=3x^2dx$

2. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

1. $xdy+2ydx=0$

2. $y'+2x^2y'+2xy-2x=0$

3. Решите дифференциальное уравнение, используя схему Бернулли

1. $y'x+2y=x^3$

2. $(1+x^2)y'-xy=2x$

Оценка	Показатели оценки
3	Правильное решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными путем простого интегрирования
4	<ol style="list-style-type: none"> 1. Правильное решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными путем простого интегрирования 2. Правильное решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными путем использования математических преобразований и приведения к уравнению с разделенными переменными
5	<ol style="list-style-type: none"> 1. Правильное решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными путем простого интегрирования 2. Правильное решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными путем использования математических преобразований и приведения к уравнению с разделенными переменными 3. Правильное решение дифференциальных уравнений используя схему Бернулли: <ol style="list-style-type: none"> 1. Приведение уравнения к виду $y'+ry=q$ 2. Выполнение подстановки $y=uv$, нахождение $y'=u'v+uv'$ 3. Нахождение второй функции, путем использования математических способов преобразования уравнения. 4. Решение дифференциального уравнения 5. Записывание общего решения

Задание №7

I вариант:	II вариант:
1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:	
$x^2 y' - 2xy = 3$ $y = 3x^2 - \frac{1}{x}$	$xy' + 2y = e^{x^2}$ $y = 3 - e^{-x^2}$
1. Решите уравнение с разделяющимися переменными	
$y dy - (1 + 2x) dx = 0$	$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
2. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию	
$(1 + x^3)y' = 3x^2 y$ $y(0) = 2$	$2\sqrt{y} dx - dy = 0$ $y(0) = 1$

Оценка	Показатели оценки
3	выполнено 60 - 79 % заданий
4	выполнено 89 - 80 % заданий
5	выполнено 90 - 100 % заданий

Задание №8

I вариант:

II вариант:

1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:

$$x^2 y' - 2xy = 3$$

$$y = 3x^2 - \frac{1}{x}$$

$$xy' + 2y = e^{x^2}$$

$$y = 3 - e^{-x^2}$$

1. Решите уравнение с разделяющимися переменными

$$ydy - (1 + 2x)dx = 0$$

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$$

2. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию

$$(1 + x^3)y' = 3x^2 y$$

$$y(0) = 2$$

$$2\sqrt{y}dx - dy = 0$$

$$y(0) = 1$$

Оценка	Показатели оценки
--------	-------------------