Областное государственное бюджетное
образовательное учреждение
среднего профессионального образования
«Иркутский авиационный техникум»

УТВЕРЖДАЮ
Директор ОГБОУ СПО «ИАТ»
____________________ В.Г. Семенов

Комплект методических указаний по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 Математика

образовательной программы (ОП)
по специальности СПО

160108 Производство летательных аппаратов

базовой подготовки

Иркутск 2013

Математика является частью образовательной программы в соответствии с ФГОС СПО по специальности 151901 «Технология машиностроения»

Практическая работа является одним из видов учебной работы обучающихся.

Основные цели практической работы:

- систематизация и закрепление теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубление и расширение теоретических знаний, формирование умений использовать справочную документацию и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельного мышления;
- развитие исследовательских умений.

Особую важность приобретают умения обучающихся выбирать материалы для деятельности, выполнять расчеты; Учебная дисциплина «Математика» относится к математическому и общему естественнонаучному циклу основной профессиональной образовательной программы.

Дисциплина «Математика» должна вооружить студента математическими знаниями, необходимыми для изучения ряда общенаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, создать фундамент математического образования, необходимый для получения профессиональных компетенций, воспитать математическую культуру и понимание роли математики в различных сферах профессиональной деятельности.

На практическую работу в курсе изучения дисциплины отводится 20 часов. Методические рекомендации помогут обучающимся целенаправленно изучать материал по теме, определять свой уровень знаний и умений при выполнении самостоятельно практической работы.

Рекомендации для обучающихся по выработке навыков практической работы:

Слушать, записывать и запоминать лекцию.

Внимательно читать план выполнения работы.

Выбрать свой уровень подготовки задания.

Обращать внимание на рекомендуемую литературу.

Из перечня литературы выбирать ту, которая наиболее полно раскрывает вопрос задания.

Учиться кратко и четко излагать свои мысли.

Использовать общие правила написания конспекта

Оценивать, насколько правильно понято содержание материала, для этого придумать вопрос, направленный на уяснение материала.

Обращать внимание на достижение основной цели работы.

Перечень практических работ студентов

12	Вычисление производных суммы, произведения, частного.	1	60-63
13	Решение производных сложных функций.	1	64-67
14	Изучение определенного интеграла.	1	68-71
15	Вычисление и решение определенного интеграла в прикладных задачах.	1	76-78
16	Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла.	1	73-75
17	Изучение и умение решения ДУ.	1	79-84
18	Изучение сходимости и расходимости рядов.	1	85-99
19	Нахождение сходимости и расходимости рядов.	1	100-107
20	Изучение и вычисление задачи числовых характеристик случайной величины с использованием элементов комбинаторики.	1	108-114
	Итого	20	

Практическая работа №1

по теме: «Изображение комплексных чисел на плоскости».

Вид занятия.

Комбинированное.

Изучение нового материала. Повторение ранее изученного материала.

Цель занятия.

Учебная. Повторить определение и изображение, комплексные числа, а также решать примеры по алгоритму.

Воспитательная: Воспитание нравственного поведения. Расширение кругозора.

Обеспечение занятия. Наглядные пособия:

1. Организационный момент
2. Изучение нового материала

Форма: Практическое занятие

Ход занятия.

Повторение

Основные понятия: Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Комплексным числом z называется пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом равенство, сумма и произведение упорядоченных пар, а также отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом:

1) два комплексных числа z1 = (x1, y1) и z2 = (x2, y2) называются равными, если x1 = x2 и y1 = y2;

2) суммой комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z вида: z = (x1 + x2, y1 + y2);

3) произведением комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z = (x1x2 - y1y2, x1y2 + x2y1);

4) множество комплексных чисел , отождествляется с множеством действительных чисел R.

Разностью комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z такое, что z2 + z = z1, откуда находим z = z1 - z2 = (x1 - x2, y1 - y2).

Частным комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z такое, что . Отсюда находим

Комплексное число (0, 1) обозначается символом i = (0, 1). Тогда , т. е. i2 = -1. Произвольное комплексное число z можно записать в виде

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$.

Эта запись называется алгебраической формой комплексного числа. Комплексное число   называется сопряженным по отношению к комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить как точку на плоскости с координатами x и y. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью, при этом ось Ox называется действительной, а Oy - мнимой.

Расстояние r точки z от нулевой точки, т. е. число называется модулем комплексного числа z и обозначается символом $|z|$.

Число   называем аргументом комплексного числа z и обозначаем символом $\theta = \arg z$. При заданном r углы, отличающиеся на , соответствуют одному и тому же числу. В этом случае записываем   называем главным значением аргумента.

Числа r и θ называют полярными координатами комплексного числа z. В этом случае $z = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Если $z1 = (r1 \cos \theta1, r1 \sin \theta1)$, $z2 = (r2 \cos \theta2, r2 \sin \theta2)$, то

$z1z2 = (r1r2 \cos(\theta1 + \theta2), r1r2 \sin(\theta1 + \theta2))$,

Для n-й степени числа $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ формула приобретает вид $zn = (rn \cos n\theta, rn \sin n\theta)$.

При $r = 1$ соотношение приобретает вид $zn = (\cos n\theta, \sin n\theta)$ и называется формулой Муавра.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

(1)

Задание на дом: [2], стр.102, №289-231 решить.

Практическая работа №2

по теме: «Геометрическое построение комплексных чисел на плоскости».

Вид занятия.

Комбинированное.

Изучение нового материала. Повторение ранее изученного материала.

Цель занятия.

Учебная. Повторить определение и геометрическое построение комплексных чисел, а также решать примеры по алгоритму.

Воспитательная: Воспитание нравственного поведения. Расширение кругозора.

Обеспечение занятия. Наглядные пособия:

1. Организационный момент
2. Изучение нового материала

Форма: Практическое занятие

Ход занятия.

Повторение

Основные понятия: Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Комплексным числом z называется пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом равенство, сумма и произведение упорядоченных пар, а также отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом:

1) два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются **равными**, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;

2) **суммой** комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z вида : $z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

3) **произведением** комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;

4) множество комплексных чисел $(x,\ 0),\ \ x \in \mathbf{R}$, отождествляется с множеством действительных чисел **R**.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 + z = z_1$, откуда находим $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Отсюда находим

$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Комплексное число (0, 1) обозначается символом i = (0, 1). Тогда $(0,\ 1)\cdot(0,\ 1)=(-1,\ 0)$, т. е. $i^2 = -1$. Произвольное комплексное число z можно записать в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Эта запись называется **алгебраической формой** комплексного числа. Комплексное число $\bar{z}=(x,\ -y)=x-iy$ называется **сопряженным** по отношению к комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить как точку на плоскости с координатами x и y. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**, при этом ось Ox называется **действительной**, а Oy - **мнимой**.

Расстояние r точки z от нулевой точки, т. е. число

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}},$$

называется **модулем** комплексного числа z и обозначается символом $|z|$.

Число

$$\theta=\begin{cases} arctg(y/x), & если \quad x>0, \\ arctg(y/x)+\pi, & если \quad x<0,\ y\geq 0, \\ arctg(y/x)-\pi, & если \quad x<0,\ y<0, \\ (\pi/2)\operatorname{sgn} y, & если \quad x=0 \end{cases}$$

называем **аргументом** комплексного числа z и обозначаем символом θ = arg z. При заданном r углы, отличающиеся на $2n\pi,\ n\in \mathbf{Z}$, соответствуют одному и тому же числу. В этом случае записываем $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$; $\arg z$ называем **главным значением** аргумента.

Числа r и θ называют **полярными координатами** комплексного числа z. В этом случае

$$z = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

называется **тригонометрической формой** комплексного числа.

Если $z_1 = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$, $z_2 = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$, то

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2),\ \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

Для n-й степени числа $z = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ формула приобретает вид $z^n = (r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta)$.

При $r = 1$ соотношение приобретает вид $z^n = (\cos n\theta, \sin n\theta)$ и называется **формулой Муавра**.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n},\ \sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = \overline{0,\ n-1} \qquad (1)$$

Задание на дом: [1], стр.99, до решать примеры в тетрадях.

Итог занятия

Орг. момент	Проверка домашнего задания	Объяснение новой темы	закрепление	Самостоятельная работа	Итог урок	Домашнее задание

	(опрос)					
2мин	5 мин	15мин	8 мин	10 мин	2мин	3 мин

Количество часов на выполнение задания – 1
Срок выполнения задания – 1 неделя сентября
Баллы:
максимальный – 5
минимальный – 3
Критерии оценки задания:
5 баллов
- наличие полных, глубоких, осознанных правильных решений;
- логичность и последовательность изложения материала.

Практическая работа №3

по теме: « Вычисление комплексных чисел в алгебраической форме, действия над ними ».

Цель работы – закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов: проверка и корректировка текущих знаний, вычислительных навыков и умений студентов

Ход занятия. **<u>Примеры задач с решениями</u>**

Доказать, что: а) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; б) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; в) $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Выполнить указанные операции: а) $(2 - i)(2 + i)^2 - (3 - 2i) + 7$; б) $(1 + i)^4$; в) $(\sqrt{3}/2 + i/2)^6$.

Делится ли многочлен $x^4 + 2x^2 + 4(1 + i)$ на $x - 1 + i$?

Найти частное комплексных чисел: а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1+i}$; в) $\frac{(1/2)+i(\sqrt{3}/2)}{(1/2)-i(\sqrt{3}/2)}$.

Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_2 - z_1$; в) $z_1 z_2$; г) z_1/z_2.

Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме: а) -3; б) $-i$; в) $1 + i$; г) $-1+i\sqrt{3}$.

Установить, при каких действительных значениях x и y равны следующие комплексные числа: $z_1 = x^2 = xyi - 5 + i$ и $z_2 = xi - y^2 + yi$.

Найти координаты точки M, изображающей комплексное число $z = \frac{5i-2}{3i+1} + i + \frac{8i-3}{2-i}$.

Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

Решить уравнение $z^6 + 1 = 0$.

Доказать, что $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2$.

Найти число, сопряженное с числом $z=\frac{1}{4}\left(\frac{17+31i}{7+i}+\frac{12}{(1+i)^4}\right)+i$.

Установить, при каких действительных значениях *x* и *y* являются противоположными следующие комплексные числа: $z_1=\frac{xyi+y^2-9x^2}{i}$ и $z_2=\frac{29}{2+5i}$.

Домашнее задание: [1], стр.102, №229-231 решить.

Практическая работа №4

Выполнить практическую работу по теме: «Переход от алгебраической формы к показательной и обратно. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно».

Цель работы – закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов: проверка и корректировка текущих знаний и умений студентов переход от алгебраической формы к показательной и обратно.

Вид контроля – текущий

Уровень усвоения – репродуктивный.

Форма контроля – письменная практическая работа (в рукописном, электронном или печатном виде выполнения решения примеров)

Вопросы и задания:

1.Составьте план работы по выполнению задания

2. Прочитайте материал по учебникам (см. список литературы)

3. Выполнить задания указанного преподавателем номера варианта.

Переход **от алгебраической** формы записи комплексного числа **к показательной** (или к форме записи в полярных координатах).

Пусть комплекс сопротивления дан **в алгебраической форме** записи:

$\underline{Z} = R + jX = 4 + j3.$

Необходимо **преобразовать алгебраическую** форму записи **в показательную** (в форму записи в полярных координатах). Воспользуемся

вышеприведенными формулами перехода. Модуль комплекса сопротивления $\underline{Z}$:

$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ Ом.

Заметьте, что модуль комплексного числа обозначается без черточки внизу.

Аргумент (угол) комплекса сопротивления $\underline{Z}$:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X}{R} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = 36{,}87^{\circ}.$$

Тогда комплекс сопротивления $\underline{Z}$ в показательной форме (в форме записи в полярных координатах) будет:

$$\underline{Z} = 4 + j3 = 5e^{j36{,}87^{\circ}} = 5\angle 36{,}87^{\circ}.$$

Напоминаю, что все вышеприведенные формы записи комплексного числа равноправны.

2. Переход **от показательной** формы записи комплексного числа (в форме записи в полярных координатах) **к алгебраической**. Пусть комплекс сопротивления дан **в показательной форме** записи (в форме записи в полярных координатах):

$$\underline{Z} = 5e^{j36{,}87^{\circ}} = 5\angle 36{,}87^{\circ} = Z\angle\varphi_{Z}.$$

Необходимо **преобразовать показательную** форму записи **в алгебраическую**. Воспользуемся вышеприведенными формулами перехода. Резистивное сопротивление (действительная составляющая комплекса):

$$R = Z\cos\varphi = 5\cos 36{,}87^{\circ} = 4$$ Ом.

Реактивное сопротивление комплекса Z (мнимая составляющая комплекса):

$$X = Z\sin\varphi = 5\sin 36{,}87^{\circ} = 3$$ Ом.

Заметьте, что в обеих вышеприведенных формулах Z записано без подчеркивания. Подумайте, почему.

Теперь, когда найдены составляющие комплексного сопротивления R и X, комплекс сопротивления запишется:

$\underline{Z} = R + jX = 4 + j3$.

В общем виде запись 2-х вышеприведенных примеров выглядит так:

$\underline{Z} = 4 + j3 = 5\cos 36{,}87^\circ + j5\sin 36{,}87^\circ = 5e^{j36{,}87^\circ} = 5\angle 36{,}87^\circ$.

Основные правила при простейших операциях с комплексными числами

1. Сложение и вычитание удобнее производить в алгебраической форме записи

Примеры: Сложение

При сложении комплексных чисел отдельно складываются вещественные составляющие и отдельно мнимые составляющие.

Найти сумму двух сопротивлений.

Пусть $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 4 + j2$, $\underline{Z}_2 = R_2 - jX_2 = 2 - j8$. Тогда

$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (R_1 + jX_1) + (R_2 - jX_2) = (R_1 + R_2) + j(X_{L1} - X_{C2}) =$
$= (4+2) + j(2-8) = 6 - j6.$

Теперь сопротивление $\underline{Z} = 6 - j6$ можно перевести в любую другую, удобную для дальнейших вычислений, форму.

Более сложный случай сложения

Найти сумму двух напряжений.

Пусть $\underline{U}_1 = 6 + j8$,

$\underline{U}_2=5Ð36,87^o$.

Как видим, напряжение $\underline{U}_2$ задано в полярных координатах. В этом случае так просто напряжения $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$ не сложить. Необходимо сначала напряжение $\underline{U}_2$ перевести в удобную для сложения форму – в алгебраическую форму.

Переводим: $\underline{U}_2 = 5\angle 36{,}87^\circ = 5\cos 36{,}8^\circ 7 + j5\sin 36{,}87^\circ = 4 + j3$.

Вот теперь можно сложить $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$ так, как было показано выше.

В общем случае, если необходимо сложить несколько комплексных чисел, записанных в полярной форме координат (или в показательной форме), то, естественно, необходимо все их перевести в алгебраическую форму записи комплексного числа и только потом складывать. Так проще.

Вычитание: Найти разность двух комплексов токов.

Пусть $\underline{I}_1 = 7 + j4$,

$\underline{I}2 = 4 + j8$.

Тогда $\underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (7 + j4) - (4 + j8) = 3 - j4$.

Теперь выражение для тока можно перевести в любую, удобную для дальнейших вычислений, форму. Более сложный случай вычитания

Найти разность двух комплексов напряжений.

Пусть $\underline{U}_1 = 6 + j8$,

$\underline{U}_2 = 5\angle 36{,}87^\circ$.

Как видим, напряжение $\underline{U}_2$ задано в полярных координатах. В этом случае так просто найти разность этих напряжений $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$ не получится. Необходимо сначала напряжение $\underline{U}_2$ перевести в удобную для вычитания форму – в алгебраическую форму.

Переводим: $\underline{U}_2 = 5\angle 36{,}87^\circ = 5\cos 36{,}87^\circ + j5\sin 36{,}87^\circ = 4 + j3$.

Вот теперь можно вычесть из напряжения $\underline{U}_1$ напряжение $\underline{U}_2$ так, как было показано выше.

В общем случае, если необходимо получить разность нескольких комплексных чисел, записанных в полярной форме координат (или в показательной форме), то, естественно, необходимо все их перевести в алгебраическую форму записи комплексного числа и только потом производить операцию вычитания. Так проще.

2. Умножение и деление комплексных чисел удобнее производить в показательной форме записи или в форме записи в полярных координатах

Примеры Умножение

Пусть надо умножить комплекс сопротивления $\underline{Z}$ на комплекс тока $\underline{I}$, чтобы получить напряжение $\underline{U}$ на каком-либо участке электрической цепи.

Пусть $\underline{Z} = 8\angle 30^\circ$,

$\underline{I} = 6\angle -15^\circ$.

При умножении комплексных чисел модули этих комплексных чисел перемножаются, а аргументы (углы) складываются.

Тогда $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = 8\angle 30^\circ \cdot 6\angle -15^\circ = 48\angle 15^\circ$.

Деление

При делении комплексных чисел модули этих комплексных чисел делятся, а аргументы (углы) вычитаются. Пусть надо поделить комплекс напряжения $\underline{U}$ на комплекс тока $\underline{I}$, чтобы получить комплекс сопротивления.

Пусть $\underline{U} = 48\angle 15^\circ$,

$\underline{I} = 6\angle -15^\circ$.

Тогда $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{48\angle 15^\circ}{6\angle -15^\circ} = 8\angle 30^\circ$. Более сложный случай

Если какой-либо комплекс при делении или умножении записан в форме неудобной для деления или умножения, то его сначала надо преобразовать в форму удобную для этих действий.

Примеры

1. Надо умножить сопротивление на ток.

Пусть $\underline{Z} = 4 + j3$,

$\underline{I} = 10\angle 20^\circ$.

В этом случае сначала надо преобразовать комплекс сопротивления из алгебраической формы в форму в полярных координатах (или в показательною форму) и после этого произвести умножение.

Преобразуем: $\underline{Z} = 4 + j3 = 5\angle 36,87^\circ$.

Умножаем: $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = 5\angle 36,87^\circ \cdot 10\angle 20^\circ = 50\angle 56,87^\circ$.

2. Надо разделить напряжение на ток, чтобы найти сопротивление.

Пусть $\underline{U} = 50\angle 56{,}87^\circ$,

$\underline{Z} = 4 + j3$.

В этом случае сначала надо преобразовать комплекс сопротивления из алгебраической формы в форму в полярных координатах (или в показательною форму) и после этого произвести деление.

Преобразуем: $\underline{Z} = 4 + j3 = 5\angle 36{,}87^\circ$.

Делим: $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \dfrac{50\angle 56{,}87^\circ}{5\angle 36{,}87^\circ} = 10\angle 20^\circ$.

Выше были показаны удобные методы умножения и деления комплексных чисел. Это не исключает и менее удобные методы умножения и деления – в алгебраической форме записи комплексных чисел. **Везде, где использовалась форма записи в полярных координатах, можно использовать показательную форму записи комплексных чисел.**

.

Та запись комплексного числа, которую мы использовали до сих пор, называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна немного другая форма записи комплексного числа. Пусть $z = a + bi,\ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и φ = arg z. Тогда по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Отсюда получается

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

Пример 1

Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin \varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Арифметические действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, производятся следующим образом. Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Имеем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Видно, что в тригонометрической форме операции умножения и деления производятся особенно просто: для того, чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) их аргументы.

Отсюда следует, что для того чтобы перемножить n комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы: если φ_1, φ_2, ..., φ_n – аргументы чисел z_1, z_2, ..., z_n, то

$$\arg(z_1z_2\ldots z_n)=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n,$$

$$|z_1z_2\ldots z_n|=|z_1||z_2|\ldots|z_n|.$$

В частности, если все эти числа равны между собой, то получим формулу, позволяющую возводить комплексное число в любую натуральную степень.

Первая формула Муавра:

$$z^n=\left(r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right).$$

Пример 2

Вычислить z^4, если $z=1-\sqrt{3}i.$

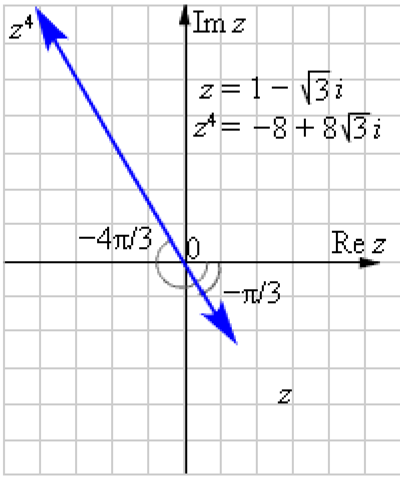


Рисунок 1.4.3.1

$$z^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^3\left(\sqrt{3}i - 1\right) = 8\left(\sqrt{3}i - 1\right).$$

Число z называется корнем степени $n, n \in \mathbb{N},$ из комплексного числа w, если $z^n = w.$ Корень степени $n, n \in \mathbb{N},$ обозначается $z = \sqrt[n]{w}.$ Пусть теперь число w фиксировано. Найдём z из уравнения $z^n = w.$

Если w = 0, то у уравнения $z^n = 0$ существует единственное решение z = 0.

Если w ≠ 0, то положим, что нам известно тригонометрическое представление числа $w = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, и будем искать число z также в тригонометрической форме: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Из определения аргумента и геометрической интерпретации комплексных чисел следует, что два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на угол, кратный 2π. Имеем:

$$r^n = r_0,\ n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

откуда получается:

$$r = \sqrt[n]{r_0},\ \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, все решения уравнения $z^n = w$ задаются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right).$$

Заметим, что если в эту формулу подставлять натуральные числа k, то при k = 0, 1, ..., n мы будем получать разные комплексные числа, а при k = n имеем:

$$z_n = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n}\right)\right) = z_0.$$

Значит, и в дальнейшем значения корней будут повторяться. Следовательно, существует ровно n корней уравнения $z^n = w,$ и все они задаются одной формулой.

Пример 3

Найти $\sqrt[3]{-1}.$

Задание на дом: [1], стр.103-104,№228, 230,243, 248 решить.

Практическая работа № 5

По теме: «Выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме».

Цель: Повторить определение и действия над комплексными числами в показательной форме.

Вид контроля – текущий

Уровень усвоения – репродуктивный.

Форма контроля – письменная самостоятельная работа (в рукописном, электронном или печатном виде выполнения решения примеров)

Вопросы и задания:

1.Составьте план работы по выполнению задания

2. Прочитайте материал по учебникам (см. список литературы)

3. Выполнить задания указанного преподавателем номера варианта.

План урока

1. Организационный момент.
2. Повторение пройденного материала.
3. Закрепление пройденного материала (пр/работа).
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).

Изучение нового материала по теме: «Действия над комплексными числами в показательной форме». Дать определение и действия над комплексными числами в показательной форме.

Сложение (вычитание) комплексных чисел.

$z1 \pm z2 = (x1 + iy1) \pm (x2 + iy2) = (x1 \pm x2) + i(y1 \pm y2)$,(5)

то есть при сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

Примеры:

1)(1 + i) + (2 – 3i) = 1 + i + 2 –3i = 3 – 2i;

2)(1 + 2i) – (2 – 5i) = 1 + 2i – 2 + 5i = –1 + 7i.

Основные свойства сложения

1)z1 + z2 = z2 + z1;

2)z1 + z2 + z3 = (z1 + z2) + z3 = z1 + (z2 + z3);

3)z1 – z2 = z1 + (– z2);

4)z + (–z) = 0;

5) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re} z$.

Умножение комплексных чисел в алгебраической форме

z1·z2 = (x1 + iy1)·(x2 + iy2) = x1x2 + x1iy2 + iy1x2 + i2y1y2 = (6)

= (x1x2 – y1y2) + i(x1y2 + y1x2),

то есть умножение комплексных чисел в алгебраической форме проводится по правилу алгебраического умножения двучлена на двучлен с последующей заменой $i^2 = -1$ и приведением подобных по действительным и мнимым слагаемым.

Примеры

1)(1 + i)·(2 – 3i) = 2 – 3i + 2i – 3i2 = 2 – 3i + 2i + 3 = 5 – i;

2)(1 + 4i)·(1 – 4i) = 1 – 42 i2 = 1 + 16 = 17;

3)(2 + i)2 = 22 + 4i + i2 = 3 + 4i.

Умножение комплексных чисел тригонометрической форме

*z*1·z2 = *r*1(cos*j*1 + *i*sin*j*1)×*r*2(cos*j*2 + *i*sin*j*2) =

= *r*1*r*2(cos*j*1cos*j*2 + *i*cos*j*1sin*j*2 + *i*sin*j*1cos*j*2 + *i*2 sin*j*1sin*j*2) =

= *r*1*r*2((cos*j*1cos*j*2 – sin*j*1sin*j*2) + *i*(cos*j*1sin*j*2 + sin*j*1cos*j*2))

Þ $\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)}$

Произведение комплексных чисел в тригонометрической форме , то есть при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Пример

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 6(0 + i\cdot 1) = 6i.$$

Основные свойства умножения

1)z1×z2 = z2×z1 — коммутативность;

2)z1×z2×z3 = (z1×z2)×z3 = z1×(z2×z3) — ассоциативность;

3)z1×(z2 + z3) = z1×z2 + z1×z3 — дистрибутивность относительно сложения;

4)z×0 = 0; *z*×1 = *z*;

5) $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Деление комплексных чисел

Деление — это обратная умножению операция, поэтому

если z×z2 = z1 и z2 ¹ 0, то $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

При выполнении деления в алгебраической форме числитель и знаменатель дроби умножаются на число, комплексно сопряженное знаменателю:

$\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}}$ Деление комплексных чисел в алгебраической форме .(7)

При выполнении деления в тригонометрической форме модули делятся, а аргументы вычитаются:

$\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)}$ Деление комплексных чисел в тригонометрической форме .(8)

Примеры

1) $\dfrac{1+i}{2+3i} = \dfrac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i+2i-3i^2}{2^2-3^2i^2} = \dfrac{5-i}{13} = \dfrac{5}{13} - i\dfrac{1}{13}$;

2) $\dfrac{3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{3}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 1{,}5\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Возведение комплексного числа в натуральную степень

Возведение в натуральную степень удобнее выполнять в тригонометрической форме:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ штук}} =$$

$$= \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ штук}} (\cos(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ штук}}) + i \sin(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ штук}})) =$$

$$= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

В результате получается формула Муавра**:**

$$\boxed{z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$ Формула Муавра,(9)

то есть при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример

Вычислить (1 + *i*)10.

Решение:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0 + i \cdot 1) = 32i.$$

Замечания

1. При выполнении операций умножения и возведения в натуральную степень в тригонометрической форме могут получаться значения углов φ за пределами одного полного оборота. Но их всегда можно свести к углам $\varphi \in [0; 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi, \pi]$ сбрасыванием целого числа полных оборотов по свойствам периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

2. Значение $\begin{cases} \varphi = \arg z \\ \varphi \in [0; 2\pi) \text{ или } \varphi \in (-\pi, \pi] \end{cases}$ называют главным значением аргумента комплексного числа z;

при этом значения всех возможных углов φ обозначают $\operatorname{Arg} z$;

очевидно, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа

Корнем степени n из комплексного числа *z*, где $n \in$ N, называется комплексное число *w*, такое что *wn* = *z* $\Rightarrow$

$$\sqrt[n]{z} = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega^n = z.$$

Примеры

$\sqrt{1} = \pm 1$, так как $(\pm 1)^2 = 1$;

$\sqrt{-4} = \pm 2i$, так как $(\pm 2i)^2 = 4i^2 = -4$;

$\sqrt[4]{1} = \pm 1$ или $\pm i$, так как $(\pm 1)^4 = 1$ и $(\pm i)^4 = 1$.

Из определения очевидно следует, что операция извлечения корня из комплексного числа является многозначной.

Если использовать формулу Муавра, то нетрудно доказать следующее утверждение:

$\sqrt[n]{z}$ существует при "z и если *z* ¹ 0, то $\sqrt[n]{z}$ имеет *n* различных значений, вычисляемых по формуле

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=\overline{0,n-1}}$$

Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа ,(10)

где $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$\sqrt[n]{|z|}$ — арифметический корень на .

Все значения $\sqrt[n]{z}$ расположены регулярным образом на окружности радиусом $\sqrt[n]{|z|}$ с начальным углом $\frac{\varphi}{n}$ и углом регулярности $\frac{2\pi}{n}$.

Примеры

1) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right) =$

$= \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3} = \omega_k$, $k = 0, 1, 2$ Þ

Þ $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\omega_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1+0 = -1$,

$$\omega_2 = \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{-1} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -1, \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$

Задание на дом: [2] , стр.108, до решать примеры в тетрадях.

Практическая работа №6

По теме: «Решение комплексных чисел в алгебраической форме, действия над ними».

Цель: Отработать и закрепить навыки и умения в разложение определителя по элементам строки и столбца.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление изученного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).
2. Изучение нового материала по теме: «Решение комплексных чисел в алгебраической форме, действия над ними». Рассмотреть примеры по алгоритму, например показательная форма комплексного числа-

Показательной формой комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется форма

$z = r \cdot e^{i\varphi}$ Показательная форма комплексного числа,(11)

где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Примеры

1) $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$;

2) $z = 3 + 0i = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3\cdot e^{i0}$;

3) $z=0+4i=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=4e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Действия над комплексными числами в показательной форме выполняются по правилам действий со степенями:

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\quad(12)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\quad(13)$$

$$z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi},\quad(14)$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k=\overline{0,n-1}.\quad(15)$$

Примеры

Пусть $z_1=2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

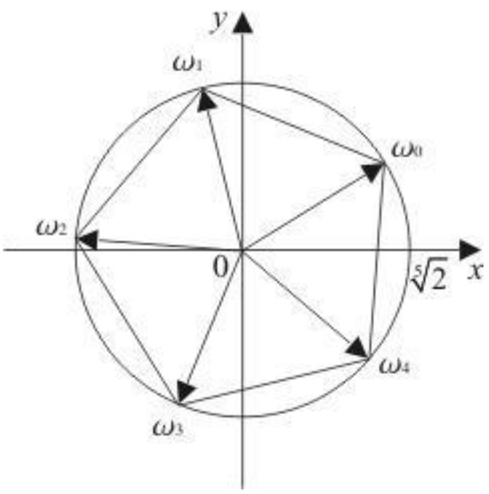
$z_2=-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Тогда $z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{i\frac{5\pi}{6}}=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}e^{-i\frac{13\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}};$$

$$z_1^8=\left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^8=\left(2\sqrt{2}\right)^8 e^{-i\frac{8\pi}{4}}=2^{12}e^{-i2\pi}=2^{12}\cdot e^{-i0}=2^{12};$$

$$\sqrt[5]{z_2}=\sqrt[5]{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}=\sqrt[5]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5}}=\sqrt[5]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}k\right)}=\omega_k,$$
$$k=\overline{0,4}$$



$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}
\omega_0=\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt[5]{2}\left(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right),\\
\omega_1=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}\left(\cos 102^\circ+i\sin 102^\circ\right),\\
\omega_2=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}\left(\cos 174^\circ+i\sin 174^\circ\right),\\
\omega_3=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}\left(\cos 246^\circ+i\sin 246^\circ\right),\\
\omega_4=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}\left(\cos 318^\circ+i\sin 318^\circ\right),
\end{array}\right.$$

Числа $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[5]{2}$.

Задание на дом: [2], выполнить к/задание на стр. 11-112 по вариантам.

Практическая работа № 7

по теме: « Определители 2-го, 3-го и n-го порядка, вычисление определителей. Свойства определителей»

Цель: Научиться решать системы уравнений по формулам Крамера, используя свойства определителей.

Оборудование:

Подготовка к работе

1. Повторить основные понятия и определения

по теме «Определители и свойства определителей 2 и 3 порядка».

«Решение систем уравнений; формулы Крамера»

Указание. Изучите способ решения систем уравнений по формулам Крамера».

5. Решите систему уравнений (любым методом):

а) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x1 + x2 - 6x3 - 4x4 = 6, \\ 3x1 - x2 - 6x3 - 4x4 = 2, \\ 2x1 + 3x2 + 9x3 + 2x4 = 6, \\ 3x1 + 2x2 + 3x3 + 8x4 = -7. \end{cases}$

Решите следующую систему уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \{2x + y = 1 \end{cases}$

3. Найдите все значения а, при которых система имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ ax + y = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 7y = 20 \\ ax + 14y = 15 \end{cases}$

4. Найдите значения параметра а, при котором система имеет бесконечное

множество решений:

а) $\begin{cases} 2x + y - a = 0 \\ (a2 + a)\, x = 6 - 3y \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + ay = 3 \\ ax + 3y = 3 \end{cases}$

Ответ: x=1, y=2, z=3.

Задание на дом: [1] , стр. 282, № 14, 21 решить.

Практическая работа № 8

по теме: « Разложение определителя по элементам строки или столбца. Ранг матрицы».

Цель: Научиться решать системы уравнений по формулам Крамера,

используя свойства определителей. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Ранг матрицы

Оборудование:

Подготовка к работе

1. Повторить основные понятия и определения

по теме «Определители и свойства определителей 2 и 3 порядка».

«Решение систем уравнений; формулы Крамера»

Указание. Изучите способ решения систем уравнений по формулам Крамера».

Решите следующую систему уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \{2x + y = 1 \end{cases}$

3. Найдите все значения а, при которых система имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ ax + y = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 7y = 20 \\ ax + 14y = 15 \end{cases}$

4. Найдите значения параметра а, при котором система имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} 2x + y - a = 0 \\ \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + ay = 3 \\ \end{cases}$

(a2 + a) x = 6 - 3y   ax + 3y = 3

Ответ: x=1, y=2, z=3.

Задание на дом: [1] , стр. 282, № 14, 21 решить.

Практическая работа №9

По теме: «Вычисление пределов функции».

Цель: Повторить определение пределов и алгоритм вычисления, решать примеры по алгоритму.

План урока

1. Организационный момент.
2. Повторение пройденного материала.
3. Закрепление пройденного материала (пр./работа).
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).
2. Изучение нового материала по теме: «Вычисление пределов функции» и решать примеры по алгоритму.

   Теория пределов.

Цель: Научиться вычислять пределы, используя свойства и теоремы
Оборудование:

Подготовка к работе

Повторить основные понятия и определения

Основные теоремы о пределах

$\lim(x+y)=\lim x+\lim y;(1)$

$\lim(x-y)=\lim x-\lim y;(1^{*})$, то из условий(1) и (1*) $\Rightarrow$ $\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y;$

$\lim(xy)=\lim x\lim y;(2)$

$\lim(x^{m})=(\lim x)^{m}$ (3)

$\lim\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x},$ (4)

$\lim\frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$, если limy≠0 (5)

lim ($\log_a$ x) = $\log_a$ (lim x) (6)

Запомните, что

lim $\frac{\sin x}{x}$ = 1, при x→ 0 (Первый замечательный предел)

lim $(1+\frac{1}{n})^n$ = e, при n → ∞

e ≈ 2,71828 — основание натуральных логарифмов;

(логарифм числа ***x*** по основанию ***e*** называется натуральным логарифмом и обозначается ***ln x.***

lim $(1+\frac{1}{n})$ n = e = lim (1 +α) 1/α = e (второй замечательный предел)

при n→ ∞; или при α→ 0.

2. Рассмотрите решение следующих примеров:

Пример 1. Найти lim ($x^4 - 3x^2 + 16x + 1$), при x→ -1

Решение. lim ($x^4 - 3x^2 + 16x + 1$) = (lim x^4 – lim $3x^2 + 16x + 1$) = [(lim x)^4 - 3(lim x)^2 +16lim x +1] =

=$(-1)^4 - 3(-1)^2 + 16(-1) + 1 = -17$

Ответ. - 17.

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную x заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2 - x - 5}{x^3 + x + 1} = \frac{2*2^2 - 2 - 5}{2^3 + 2 + 1} = \frac{1}{11}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при x→0 lim $(5x^3 - 3x^2) = 0$

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}=\frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)}=\frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x\to 0}(5x-3)=\lim_{x\to 0}(5x)-3=0-3=-3$$

$-3 \neq 0$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)}{5x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}5x-3}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}{5\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}=-\frac{2}{3}$$

Ответ. -2/3

Пример 3: Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{3x+1}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3x+1}=\frac{5}{\lim\limits_{x\to\infty}3x+1}=\frac{5}{3\lim\limits_{x\to\infty}x+1}=\frac{5}{\infty}=0$$

Ответ. 0.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^3})}=\frac{1}{2}$$

Ответ. 1/2.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$$

Применяя формулу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4*1=4$$

Ответ. 4.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.. при x=5 числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{18\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{90}$$

$$\text{Либо}:\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{90}$

Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)^2}{\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)^2}{\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)^2}=1$$

Найдем наклонную асимптоту:

$y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^2}{\frac{x}{x^2}(x-2)^2}=0 \qquad k = 0$$

Найдем b: $b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=1$ b=1

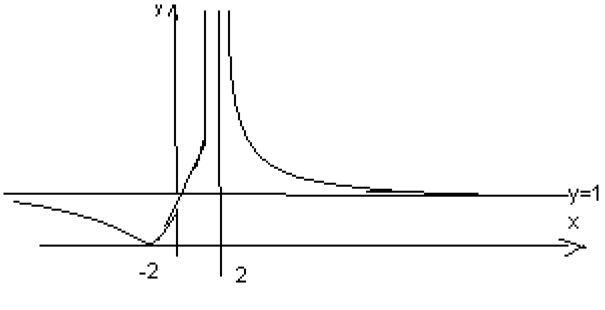
Уравнение наклонной асимптоты имеет вид: y = 0*x + 1 или *y = 1* - горизонтальная асимптота (частный случай наклонной асимптоты)

Точки пересечения с осями координат:

$x=0;\ y=1$

$y=0;\ x=-2$

Построим график



Задание на дом: [1] , стр.171, №93, 97 решить.

Практическая работа №10

По теме: «Вычисление первого замечательного предела».
Цель: Дать Теорему и рассмотреть применение.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).
2. Изучение нового материала.

Вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [1^{\infty}]$.

$$1.\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\,5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)3x5x\cos(5x)}{3x\sin(5x)5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 5x}{5x}=\frac{3}{5}$$

$$3.\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3}{5}$$

$$4.\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x}{x+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$5.\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{x^4+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}}{1+\frac{10}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$

$$6.\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{2x+1}=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{x+5}\right]^{\frac{2x+1}{x+5}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x+1}{x+5}}=e^2$$

Самостоятельно решить задачи и вычислить пределы**:**

1. При параллельном соединении двух проводников, имеющих сопротивления r и r’ , общее сопротивление R, соответствующей части электрической цепи, вычисляется по формуле
   $\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$. Считая r известным, найти $\lim\limits_{r'\to\infty}R;\quad \lim\limits_{r'\to 0}R.$

Истолкуйте полученные результаты с точки зрения физики.

2. Формула выпуклой линзы имеет вид:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}, \quad d\ , f\ -$$

Расстояния соответственно предмета и его изображения.

F – фокусное расстояние линзы (const); найти $\lim_{d\to\infty} f;\quad \lim_{d\to F} f$.(1) $d<F;2)\ d>F)$;

полученные результаты объяснить с точки зрения физики.

3. Масса движущегося тела определяется соотношением

$m\ (\beta)=\dfrac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $u\ \beta=\dfrac{v}{c}$ - отношение скорости тела к скорости света.

Покажите, что в предельном переходе при $\beta \to 0$ массу можно считать постоянной и равной m_o.

4. Интервал времени между двумя событиями зависит от скорости движения системы,

где эти события происходят, следующим образом:

$\Delta t(v)=\dfrac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$; $\Pi\, pu\ \ v\to c$ найдите предел функции $\Delta t(v)$ и сделайте вывод, считая, например, что Δt_o - продолжение жизни близнеца, оставшегося на Земле, а Δt - продолжительность жизни его брата, отправившегося в космическое путешествие.

5. Значение кинетической энергии тела выражается формулой

$E_{kuh}(\beta)=\dfrac{m_o v^2}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \ \beta=\dfrac{v}{c}.$ Найдите предел этой функции,

т.е. получите классическую формулу для кинетической энергии, если $\beta\to 0$.

6. Сила давления летчика, совершающего «мертвую петлю», на сиденье в момент достижения верхней точки «мертвой петли» выражается формулой $\varphi = m(a - g)$, где $a = v^2/r$ - центростремительное (нормальное) ускорение , r- радиус петли. Рассматривая данные выражения как функцию центростремительного ускорения, докажите, что при предельном переходе $a \to g$ летчик испытывает состояние невесомости.
7. Сила давления летчика на сиденье в нижней точке «мертвой петли» определяется формулой $Q=m(g + v^2/r)$, m- масса летчика, $g = 9{,}8$ м/с^2.

   Рассматривая данное выражение как функцию от ***r*** , найдите ее предел при:

   a) $\mathbf{r \to \infty}$; b) $\mathbf{r \to 0}$. Сделайте соответствующие выводы.

8. В падающем с ускорением ***a*** лифте тело давит на пол кабины с силой $P= m(a - g)$, g - ускорение свободного падения. Рассматривая данный процесс как функцию от a, найдите ее предел при a) $\mathbf{a \to g}$; b) $\mathbf{a \to 0}$.

Сделайте выводы.

9. Вычислить следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 2. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\left(x^2-49\right)}$ 3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{1}{x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg\,5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-8}{5x^3-7x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x}{x+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+15}{x^4+7}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6}{x^4+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-5x^4+9}{4x^5+2x^3-7}$

13 . $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+5}\right)^{2n}=(1^{\infty})$ 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n}\right]^{2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x}$ 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+9}{x}\right)^{x}$

Задание на дом: [1] ,глава 4, стр.179-180 прочитать, до решать примеры в тетрадях.

Практическая работа №11

По теме: «Вычисление производной функции».

Цель: Повторить правила вычисления производной функции и выполнить решение примеров по алгоритму.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).
2. Изучение нового материала:

   Научиться находить производные сложной функции. Повторить таблицу производных основных элементарных функций. Правила дифференцирования функций. Понятие сложной функции. Дифференцирование сложной функции. Решить самостоятельно примеры.

Производная функции

Одним из основных понятий математического анализа является понятие о производной. Производной функции y=f(x) по аргументу x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при условии, что последнее стремиться к нулю. Производная обозначается символами: y', y'_x,f'(x). Таким образом,

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Продифференцировать данную функцию —значит найти ее производную. Из определения производной непосредственно вытекает общий метод ее нахождения. Числовое значение производной данной функции *y=f(x)* при данном числовом значении аргумента x=a называется частным значением производной. Это записывается так:

$$y' = y'_x = f'(x) = f'(a), \text{ т.е. } y'_{x=a} = f'(a).$$

Рассмотрим геометрическое и механическое значение производной. Производная *y'=f'(x)* при данном значении x=a равна угловому коэффициенту k касательной, проведенной к кривой через данную на ней точку M, абсцисса которой и есть данное значение *x=a*. Это можно записать та: *k=f'(a).* Напомним что угловой коэффициент k=tga , где a есть угол, составленный касательной и положительным направлением оси Ox. Для каждой точки касания угол наклона a имеет свое единственное значение.

Механический смысл производной: мгновенная скорость неравномерного движения есть производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути *S* от времени *t*. Если закон прямолинейного движения задан уравнением *S=f(t).* где *S*— путь в метрах, а *t*— время в секундах, то скорость

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

(при условии,что предел существует).

Итак ,$v=s_t'=f'(t)$, т.е. скорость точки в случае прямолинейного движения есть производная от пути по времени.

Формулы дифференцирования

$c'=0$,где $c=const$. (1)

$(x^n)=nx^{n-1}$. (2)

$x'=1$. (3)

$(u+v-w)'=u'+v'-w'$, (4)

где *u, v* и *w* — различные функции от x, имеющие производные по x.

$(uv)'=u'v+v'u$, (5- производная произведений двух функций),

где *u* и *v* — различные функции от x, имеющие производные по x.

$(cu)'=cu'$, (6), где $c=const$.

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (7) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ (8)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (9),$$

где *u* и *v* — различные функции от x, имеющие производные по x, считая, что $v^2 \neq 0$ при том значении аргумента x, при котором находится производная:

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}, \text{ где } c=const. \qquad (10)$$

$(\sin x)'=\cos x$ (11) $(\cos x)'=-\sin x$ (12)

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (13) $(ctgx)'= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x$ (14)

$(\ln x)'= \frac{1}{x}$ (15) $(a^x)'=a^x \ln a$. (16) Частный случай: $(e^x)'=e^x$. (17)

$(\arcsin x)'= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (18) $(\arccos x)'= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (19)

$(arctgx)'= \frac{1}{1+x^2}$ (20) $(arcctgx)'= -\frac{1}{1+x^2}$ (21)

Второй производной или производной второго порядка данной функции *y=f(x)* называется производная от первой производной. Обозначение второй производной: y'', $y_x{}'_x{}'$, $f''(x)$.

Рассмотрим механическое значение второй производной. С точки зрения механики, вторая производная от пути по времени есть ускорение прямолинейного движения точки *M* в данный момент:

$$a = \lim_{\Delta t \to} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v_t' = (s'_t) = s''_{tt} = f''(t)$$

т.е. ускорение есть первая производная от скорости по времени или вторая производная от пути по времени.

Пример 1. Дана функция $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$. Найти f'(0), f' (2) , f'' (0); f''(1)

Решение. $F'(x) = 9x^2 - 4x + 1$; $f''(x) = 18x - 4$

$f'(0) = 9*(0)^2 - 4*(0) + 1 = 1$; $f''(0) = 18*0 - 4 = -4$

$f'(2) = 9*2^2 - 4*2 + 1 = 29$; $f''(1) = 18*1 - 4 = 14$

Ответ. f’(0) =1, f’(2) = 29, f”(0)= - 4

Пример 2. Найти производную функции $y = (x+5)(x^2-1)$

Решение.

$y' = (x+5)'(x^2-1) + (x+5)(x^2-1)',$

$y' = (x'+5')(x^2-1) + (x+5)\left(\left(x^2\right)' - 1'\right),$ *Ответ.* $y' = 3x^2 + 10x - 1.$

$y' = (1+0)(x^2-1) + (x+5)(2x-0),$

$y' = x^2 - 1 + 2x(x+5),$ $y' = 3x^2 + 10x - 1.$

Иначе, перемножая двучлены, функцию $y=(x+5)(x^2-1)$ можно записать так: $y=x^3+5x^2-x-5$; тогда

$y'=(x^3)'+(5x^2)'-x'-5'$, $y'=3x^2+10x-1$

Ответ. $y'=3x^2+10x-1$

Пример 3.Найти производную функции $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.Решение.

Перепишем функцию в виде $y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$. и продифференцируем:

$$y' = \left(6x^{\frac{1}{3}}\right)' - \left(4x^{\frac{1}{4}}\right)', \quad y' = 6 * \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4 * \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1},$$

$$y' = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}}, \qquad y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$\textit{Ответ}: y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

Задача 1. Точка движется прямолинейно по закону $s = 2t^3 + t^2 + 1$, где s— путь в метрах, t— время в секундах. Найти величину скорости в момент $t = 3c$ и величину ускорения в момент t = 4с.

Решение. Скорость равна

$v = s'_t = (2t^3 + t^2 + 1)' = 6t^2 + 2t$

$v_{t=3} = 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 60$ *(м/с)*

Ускорение равно

$a = v'_t = (6t^2 + 2t)' = 12t + 2$

$a_{t=4} = 11 \cdot 4 + 2 = 50$*(м/с^2)*

Ответ. $v_{t=3} = 60$ *м/с*, $a_{t=4} = 50$ *м/с*^{2}.

Задача 2. Найти уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 2$ в точке, абсцисса которой равна 3.

Решение. Найдем ординату точки касания:

$y_{x=3} = 3^2 - 4^*3 + 2 = -1$

Итак, точка касания M (3; - 1) найдена. Для нахождения уравнения касательной воспользуемся уравнением пучка прямых $y - y_1 = k(x - x_1)$.

В нашем примере $x_1 = 3$, $y_1 = -1$, значит $y + 1 = k(x - 3)$.

Угловой коэффициент

$k = y'_{x=3} = (x^2 - 4x + 2)'_{x=3} - (2x - 4)_{x=3} = 2.$

Поэтому искомое уравнение касательной примет вид

$y + 1 = 2(x - 3)$ *или* $y = 2x - 7$

в общем виде

$2x - y - 7 = 0$ *(рис.5).*

Производные сложных функций. Производная сложной функции: если $y=f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$y'_x = y'_u u'_x \quad y'_x = f(u)u'_x. \qquad (11)$$

Пример 1. $y = \sqrt[5]{(4x^3 - 9)^3}$,Найти y'.

Решение. Воспользуемся способом подстановки. Положив $4x^3 - 9 = u$, имеем $y = \sqrt[5]{u^3} = u^{3/5}$, тогда

$$y' = (u^{3/5})' = \frac{3}{5}u^{-2/5}u' = \frac{3}{5}(4x^3 - 9)^{-2/5}(4x^3 - 9)' = \frac{3*12x^2}{5(4x^3 - 9)^{2/5}} = \frac{36x^2}{5\sqrt[5]{(4x^3 - 9)^2}}.$$

Пример 2. $y = \sqrt[6]{\sin^5 4x^2}$. Найти y'.

Решение. Заменим радикал дробным показателем: $y = (\sin 4x^2)^{5/6}$

$$y'=\left[(\sin 4x^2)^{5/6}\right]'=\frac{5}{6}\sin^{5/6}x^2(\sin 4x^2)'=\frac{5}{6}\sin^{-1/6}4x^2\cos 4x^2(4x^2)'=\frac{4x\cos 4x^2}{6\sqrt[6]{\sin 4x^2}}=\frac{20x\cos 4x^2}{3\sqrt[6]{\sin 4x^2}}.$$

Пример 3. $y=\ln\frac{(x^2-a)^3}{(x^2+a)^3}$. Найти y'

Решение. Вначале данную функцию лучше прологарифмировать, а затем найти производную: $y=\ln\frac{(x^2-a)^3}{(x^2+a)^3}=3\ln(x^2-a)^3-3\ln(x^2+a)^3$

$$y'=3\left[\ln(x^2-a)^3-\ln(x^2+a)^3\right]'=3\left[\frac{(x^2-a)'}{x^2-a}-\frac{(x^2+a)'}{x^2+a}\right]=3\left(\frac{2x}{x^2-a}-\frac{2x}{x^2+a}\right)=$$

$$=\ 3\left(\frac{2x^3+2ax-2x^3+2ax}{x^4-a^2}\right)=\frac{12ax}{x^4-a^2}$$

Пример 4. $y=7^{3x^3}$.Найти y'

Решение. Заменим переменную: $3x^3=u$, тогда

$y'=(7^{3x^3})'7^{3x^3}\ln 7(3x^3)'=7^{3x^3}\ln 7*9x^2$.

Пример 5. Найти производную функции $y=(x^2+3)^{10}$.

Решение. Это сложная функция. Пусть $x^2+3=u$, тогда $y=u^{10}$. Производная находится по формуле дифференцирования сложной функции:

$y'=(u^{10})'=10u^9u'_x$, $u'_x=(x^2+3)'=2x$,

$y'=10(x^2+3)^9 2x$, $y'=20x(x^2+3)^9$.

Ответ. $y'=20x(x^2+3)^9$.

Пример 6. Продифференцировать функцию $y=sin3x$.

Решение. Пусть $3x=u$, тогда $y=sinu$. $y'=(sinu)'=cosu$; $u'_x=(3x)'=3$ $y'=3cos3x$

Ответ $y'=3cos\ 3x$.

Пример 7. Найти производную функции $y=arctg\sqrt{4x-1}$

Решение. Пусть $\sqrt{4x-1}=u$, тогда $y=arctgu$, и $y'=(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}*u'_x$,

$$u'=\left(\sqrt{4x-1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{4x-1}}(4x-1)=\frac{4}{2\sqrt{4x-1}}=\frac{2}{\sqrt{4x-1}},$$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{4x-1})^2} * \frac{2}{\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{4x\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}} \qquad \text{Ответ. } y' = \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$$

Пример 8. Продифференцировать функцию y= ln sin x

Решение. sin x = u, y=ln u, тогда

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} * u_x^{'}$$

$$u_x^{'} = (\sin x)' = \cos x, \qquad y' = \frac{1}{\sin x} * \cos x = ctgx,$$

Ответ. $y' = ctgx$.

Пример 9. Дана функция $f(x) = 2^{x^2+x+1}$.Найти $f'(1)$.

Решение. Найдем производную данной функции:

f'(x) = $2^{x\ +x+1}$ · (x^2+x+1)' ln 2

f'(x) = $2^{x\ +x+1\cdot}$(2x+1)· ln 2; f'(x) = $2^{3\cdot}$(2·1+1)· ln 2 f'(1) = 24ln 2

Ответ. f'(1) = 24ln 2

Решить самостоятельно следующие задания:

1) Найти производную функции а) *y=(x^3+10)^{20}* ; b) *y=(x^5+10)^{12}*

2) Продифференцировать функцию а) *y=sin5x; y=cos 4x; y= tg 15x;*.

3) Найти производную функции $a)\ y = arctg\sqrt{8x+5};\ \ b)\ y = arcctg(\ln 2x)$

4) Продифференцировать функцию а) y= ln sin 4 x; b) y= ln cos 3 x

5) Дана функция а) $f(x) = 2^{x^3+2x+5}$.Найти $f'(0)$ $в)\ y = 5^{2ч+41}$ *Найти* $f'(0)$.

Задание на дом: [1] ,стр. 193, №171, 173, 178 решить.

Практическая работа №12

По теме: «Вычисление производных суммы, произведения, частного».

Цель: Отработать навыки и умения вычисление производных суммы, произведения, частного.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).

Изучение нового материала

Формулы дифференцирования

$c'=0$,где $c=const$. (1)

$(x^n)=nx^{n-1}$. (2)

$x'=1$. (3)

$(u+v-w)'=u'+v'-w'$, (4)

где u, v и w — различные функции от x, имеющие производные по x.

$(uv)'=u'v+v'u$, (5- производная произведений двух функций),

где u и v — различные функции от x, имеющие производные по x.

$(cu)'=cu'$, (6), где $c=const$.

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (7) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ (8)

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ (9),

где u и v — различные функции от x, имеющие производные по x, считая, что $v^2\neq 0$ при том значении аргумента x, при котором находится производная:

$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$, где *c=const.* (10)

(sinx)'=cosx (11) (cosx)'=-sinx (12)

(tgx)' = $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (13) (ctgx)'= $-\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x$ (14)

(lnx)'= $\frac{1}{x}$ (15) *(a^x)'=a^xlna.* (16) Частный случай: *(e^x)'=e^x.* (17)

(arcsinx)'= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (18) (arccosx)'= $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (19)

(arctgx)'= $\frac{1}{1+x^2}$ (20) (arcctgx)'= $-\frac{1}{1+x^2}$ (21)

Второй производной или производной второго порядка данной функции *y=f(x)* называется производная от первой производной. Обозначение второй производной: y'', $y_x{}'_x{}'$, $f''(x)$.

Рассмотрим механическое значение второй производной. С точки зрения механики, вторая производная от пути по времени есть ускорение прямолинейного движения точки *M* в данный момент:

$$a = \lim_{\Delta t \to} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v_t' = (s'_t) = s''_{tt} = f''(t)$$

т.е. ускорение есть первая производная от скорости по времени или вторая производная от пути по времени.

Пример 1. Дана функция $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$. Найти f’(0), f’ (2) , f’’ (0); f’(1)

Решение. F’(x) = 9x^2 – 4x + 1; f’’ (x) = 18x - 4

$f'(0) = 9*(0)^2 - 4*(0) + 1 = 1;$ $f''(0) = 18*0 - 4 = -4$

$f'(2) = 9*2^2 - 4*2 + 1 = 29;$ $f''(1) = 18*1 - 4 = 14$

Ответ. f’(0) =1, f’(2) = 29, f’’(0)= - 4

Пример 2. Найти производную функции $y = (x+5)(x^2 - 1)$

Решение.

$y' = (x+5)'(x^2-1) + (x+5)(x^2-1)'$,

$y' = (x'+5')(x^2-1) + (x+5)((x^2)' - 1')$, *Ответ.* $y' = 3x^2 + 10x - 1$.

$y' = (1+0)(x^2-1) + (x+5)(2x-0)$,

$y' = x^2 - 1 + 2x(x+5)$, $y' = 3x^2 + 10x - 1$.

Иначе, перемножая двучлены, функцию $y=(x+5)(x^2-1)$ можно записать так: $y=x^3+5x^2-x-5$; тогда

$y'=(x^3)'+(5x^2)'-x'-5'$, $y'=3x^2+10x-1$

Ответ. $y'=3x^2+10x-1$

Пример 3.Найти производную функции $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.Решение.

Перепишем функцию в виде $y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$. и продифференцируем:

$$y' = \left(6x^{\frac{1}{3}}\right)' - \left(4x^{\frac{1}{4}}\right)', \quad y' = 6 * \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 * \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1},$$

$$y' = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}}, \quad y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$Ответ: y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

Задача 1. Точка движется прямолинейно по закону $s = 2t^3 + t^2 + 1$, где s— путь в метрах, t— время в секундах. Найти величину скорости в момент $t = 3c$ и величину ускорения в момент t = 4с.

Решение. Скорость равна

$v = s'_t = (2t^3 + t^2 + 1)' = 6t^2 + 2t$

$v_{t=3} = 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 60$ *(м/с)*

Ускорение равно

$a = v'_t = (6t^2 + 2t)' = 12t + 2$

$a_{t=4} = 11 \cdot 4 + 2 = 50$*(м/с²)*

Ответ. $v_{t=3} = 60$ *м/с*, $a_{t=4} = 50$ *м/с²*.

Задача 2. Найти уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 2$ в точке, абсцисса которой равна 3.

Решение. Найдем ординату точки касания:

$y_{x=3} = 3^2 - 4^*3 + 2 = -1$

Итак, точка касания M (3; - 1) найдена. Для нахождения уравнения касательной воспользуемся уравнением пучка прямых $y - y_1 = k\,(x - x_1)$.

В нашем примере $x_1 = 3,\ y_1 = -1$, значит $y + 1 = k(x - 3)$.

Угловой коэффициент

$k = y'_{x=3} = (x^2 - 4x + 2)'_{x=3} - (2x - 4)_{x=3} = 2.$

Поэтому искомое уравнение касательной примет вид

$y + 1 = 2(x - 3)$ *или* $y = 2x - 7$

в общем виде

$2x - y - 7 = 0.$

2. **Задание на дом:** [1] , стр. 200,№ 203, 212, 222 решить.

Практическая работа №13

По теме: «Решение производных сложных функций».
Цель: Дать таблицу сложных функций и рассмотреть примеры.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).

Изучение нового материала по теме: «Вычисление производных сложных функций». Повторить и дать таблицу сложных функций и рассмотреть примеры.

Формулы дифференцирования

$c'=0$, где $c=const$. (1)

$(x^n)=nx^{n-1}$. (2)

$x'=1$. (3)

$(u+v-w)'=u'+v'-w'$, (4)

где u, v и w — различные функции от x, имеющие производные по x.

$(uv)'=u'v+v'u$, (5- производная произведений двух функций),

где u и v — различные функции от x, имеющие производные по x.

$(cu)'=cu'$, (6), где $c=const$.

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (7) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ (8)

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ (9),

где u и v — различные функции от x, имеющие производные по x, считая, что $v^2\neq0$ при том значении аргумента x, при котором находится производная:

$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$, где $c=const$. (10)

(sinx)'=cosx (11) (cosx)'=-sinx (12)

(tgx)' $= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (13) (ctgx)'$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$ (14)

(lnx)'=$\frac{1}{x}$ (15) *(a^x)'=a^x lna.* (16) Частный случай: *(e^x)'=e^x*. (17)

(arcsinx)'=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (18) (arccosx)'= $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (19)

(arctgx)'=$\frac{1}{1+x^2}$ (20) (arcctgx)'= $-\frac{1}{1+x^2}$ (21)

Производные сложных функций. Производная сложной функции: если $y=f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$y'_x=y'_u u'_x \quad y'_x=f(u)u'_x. \qquad (11)$$

Пример 1. $y = \sqrt[5]{\left(4x^3-9\right)^3}$,Найти y'.

Решение. Воспользуемся способом подстановки. Положив $4x^3 - 9=u$, имеем $y = \sqrt[5]{u^3} = u^{3/5}$, тогда

$$y' = (u^{3/5})' = \frac{3}{5}u^{-2/5}u' = \frac{3}{5}(4x^3-9)^{-2/5}(4x^3-9)' = \frac{3*12x^2}{5(4x^3-9)^{2/5}} = \frac{36x^2}{5\sqrt[5]{(4x^3-9)^2}}.$$

Пример 2. $y = \sqrt[6]{\sin^5 4x^2}$. Найти y'.

Решение. Заменим радикал дробным показателем: $y = (\sin 4x^2)^{5/6}$

$$y' = \left[(\sin 4x^2)^{5/6}\right]' = \frac{5}{6}\sin^{5/6} x^2 (\sin 4x^2)' = \frac{5}{6}\sin^{-1/6} 4x^2 \cos 4x^2 (4x^2)' = \frac{4x\cos 4x^2}{6\sqrt[6]{\sin 4x^2}} = \frac{20x\cos 4x^2}{3\sqrt[6]{\sin 4x^2}}.$$

Пример 3. $y = \ln\frac{(x^2-a)^3}{(x^2+a)^3}$. Найти y'

Решение. Вначале данную функцию лучше прологарифмировать, а затем найти производную: $y = \ln\frac{(x^2-a)^3}{(x^2+a)^3} = 3\ln(x^2-a)^3 - 3\ln(x^2+a)^3$

$$y' = 3\left[\ln(x^2-a)^3 - \ln(x^2+a)^3\right]' = 3\left[\frac{(x^2-a)'}{x^2-a} - \frac{(x^2+a)'}{x^2+a}\right] = 3\left(\frac{2x}{x^2-a} - \frac{2x}{x^2+a}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2x^3+2ax-2x^3+2ax}{x^4-a^2}\right) = \frac{12ax}{x^4-a^2}$$

Пример 4. $y = 7^{3x^3}$.Найти y'

Решение. Заменим переменную: $3x^3 = u$, тогда

$y' = (7^{3x^3})' 7^{3x^3} \ln 7 (3x^3)' = 7^{3x^3} \ln 7 * 9x^2$.

Пример 5. Найти производную функции $y=(x^2+3)^{10}$.

Решение. Это сложная функция. Пусть $x^2+3=u$, тогда $y=u^{10}$. Производная находится по формуле дифференцирования сложной функции:

$y'=(u^{10})'=10u^9u'_x$, $u'_x=(x^2+3)'=2x$,

$y'=10(x^2+3)^9 2x$, $y'=20x(x^2+3)^9$.

Ответ. $y'=20x(x^2+3)^9$.

Пример 6. Продифференцировать функцию $y=sin3x$.

Решение. Пусть $3x=u$, тогда $y=sinu$. $y'=(sinu)'=cosu$; $u'_x=(3x)'=3$ $y'=3cos3x$

Ответ $y'=3cos\ 3x$.

Пример 7. Найти производную функции $y = arctg\sqrt{4x-1}$

Решение. Пусть $\sqrt{4x-1} = u$, тогда $y = arctgu$, и $y' = (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} * u'_x$,

$$u' = \left(\sqrt{4x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4x-1}}(4x-1) = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}},$$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{4x-1})^2} * \frac{2}{\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{4x\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$$ Ответ. $y' = \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$

Пример 8. Продифференцировать функцию y= ln sin x

Решение. sin x = u, y=ln u, тогда

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} * u'_x$$

$$u'_x = (\sin x)' = \cos x, \qquad y' = \frac{1}{\sin x} * \cos x = ctgx,$$

Ответ. $y' = ctgx$.

Пример 9. Дана функция $f(x) = 2^{x^2+x+1}$.Найти $f'(1)$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$f'(x) = 2^{x\ +x+1} \cdot (x^2+x+1)' \cdot \ln 2$

$f'(x) = 2^{x\ +x+1} \cdot (2x+1) \cdot \ln 2;$ $f'(x) = 2^{3} \cdot (2 \cdot 1+1) \cdot \ln 2$ $f'(1) = 24 \ln 2$

Ответ. $f'(1) = 24 \ln 2$

Решить самостоятельно следующие задания:

1) Найти производную функции a) $y=(x^3+10)^{20}$; b) $y=(x^5+10)^{12}$

2) Продифференцировать функцию a) $y=\sin 5x;$ $y=\cos 4x;$ $y= tg\ 15x;$.

3) Найти производную функции $a)$ $y = arctg\sqrt{8x+5};$ $b)$ $y = arcctg(\ln 2x)$

4) Продифференцировать функцию a) y= ln sin 4 x; b) y= ln cos 3 x

5) Дана функция a) $f(x) = 2^{x^3+2x+5}$.Найти $f'(0)$ $в)$ $y = 5^{2ч+41}$ *Найти* $f'(0)$.

Задание на дом: [1] , стр.204, № 242, 244, 248 решить.

Практическая работа №14

По теме: «Изучение определенного интеграла».

Цель: Закрепить навыки и умения вычисления системы линейных уравнений.

План урока

1. Организационный момент.
2. Повторение пройденного материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (посещаемость, д/з).

2. Изучение нового материала по теме: «Изучение определенного интеграла». Закрепить навыки и умения вычисления изучение

определенного интеграла.

3. Задания для самостоятельной работы

Самостоятельная работа I-вариант	Самостоятельная работа II-вариант
1. Вычислите определенные интегралы методом непосредственного интегрирования: 1) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$ 2) $\int_{4}^{9} x^{-\frac{1}{2}} dx$ 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-16dx}{\sin^2 x}$ 5) $\int_{0}^{4} 0{,}5e^x dx$ 2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной: $\int_{0}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	1. Вычислите определенные интегралы методом непосредственного интегрирования: 1) $\int_{1}^{3} x^{-2} dx$ 2) $\int_{0}^{1} x^4 dx$ 3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ 4) $\int_{0}^{\pi} \frac{-9dx}{\cos^2 x}$ 5) $\int_{-1}^{1} 2e^x dx$ 2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной $\int_{0}^{1} x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$

Решите следующую систему уравнений по правилу Крамера:

а) 2x + 3y =1
{ 3x + 5y = 4

б) x + y = 7
{2x + 4y = 24

в) 5x + 6y = 17
{ 3x + 4y =11

г) 3x + 2y = 2
{2x + y = 1

3. Найдите все значения а, при которых система имеет единственное решение:

а) 3x - 2y = 6 { ax + y = - 3

б) 3x + 7y = 20 {ax +14y = 15

4. Найдите значения параметра а, при котором система имеет бесконечное множество решений:

а) 2x + y – a = 0 { $(a^2 + a)$ x = 6 - 3y

б) 3x + ay = 3 { ax + 3y = 3

Примеры

На самостоятельную работу отводится на занятии 15 мин. Для того, чтобы тема была зачтена, необходимо выполнить любых 3 задания.

Решите систему уравнений по правилу Крамера

1) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+5y=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 5y+6z=28 \\ x+2z=7 \end{cases}$

Решение:

1) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+5y=4 \end{cases}$. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-3\cdot 3=10-9=1\neq 0$-система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5-4\cdot 3=5-12=-7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4-3\cdot 1=8-3=5; \Rightarrow \quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\ x=\frac{-7}{1}=-7$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\ y=\frac{5}{1}=5$$

Ответ: x=-7; y=5

2)

$$\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 5y+6z=28 \\ x+2z=7 \end{cases}. \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(5\cdot 2-0\cdot 6)-4\cdot(0-1\cdot 6)=30+24=54\neq 0$$

-система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 28 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 11\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 28 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 22\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot 28\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 22\cdot(5-0\cdot 3)-56\cdot(4-3)=$$

$$=110-56=54;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}: \quad x=\frac{54}{54}; \quad x=1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 0 & 28 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 28 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 11\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(56-42)-11\cdot(0-6)=42+66=108;$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}: \quad y=\frac{108}{54}=2; \quad y=2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 28 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 28 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 28 \end{vmatrix} = 3\cdot 35+(4\cdot 28-5\cdot 11)=105+57=162;$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}; \quad z=\frac{162}{54}=3; \quad z=3$$

Ответ: x=1, y=2, z=3.

Задание на дом: [1] , стр. 282, № 14, 21 решить.

Практическая работа №16

По теме: «Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла».

Цель: Отработать навыки и умения вычисления площадей фигур с помощью определенного интеграла.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).
2. Изучение нового материала по теме: «Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла». Отработать навыки и умения определенного интеграла .

1. Производная функции $y=1-2x^3$ равна:

   а) $6x^2$; б) $1-2x^2$; в) $-6x^2$; г) $-3x^2$ д) не знаю

2. Производная функции $y=5x^2+6x-7$ равна:

   а) $5x+6-7$; б) $10x+6$ в) $2x^2+6$ г) $5x+6x-7$ д) не знаю

3. 1) Производная функции $y=e^x\cdot\sin 3x$ равна:

   а) $e^x\cdot\cos 3x$; б) $e^x\cdot\sin 3x+e^x\cdot\cos 3x$; в) $e^x\cdot\sin 3x+3e^x\cdot\cos 3x$ г) не знаю

   2) Площадь фигуры, ограниченной линиями y=x, равна:

   а) 6 кв.ед. б) 0 кв.ед. в) 5 кв.ед. г) 3 кв.ед.

4. Функция $y=x^2-4$ возрастает на числовом промежутке:

5. а) $[0;+\infty)$; б) $(0;+\infty)$; в) $[2;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$ д) не знаю

6. Функция $y = x^2 + 1$ убывает на числовом промежутке:
   а) $(0;+\infty)$; б) $(0;2)$; в) $[0;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $(-\infty;0)$;

7. Необходимое условие существования экстремума:
   а) $y' = 0$; б) $y' > 0$; в) $y' < 0$ г) y' не существует;

8. Достаточное условие существования экстремума:
а) $y' = 0$; б) смена знака производной при переходе через критическую точку;
в) y' не существует

9 Функция $y = |x|$

а) всюду дифференцируема;
б) дифференцируема всюду для $x > 0$;
в) дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$;
г) нигде не дифференцируема;
д) не знаю.

4. Скорость движения материальной точки, движущейся прямолинейно неравномерно, по закону $S = S(t)$ определяется по формуле:

а) $V = \frac{S}{t}$; б) $V_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$; в) $V_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, если $\Delta S = S - S_0$ и $\Delta t = t - t_0$

г) $V_{мгн.} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ в точке $t = t_0$

5. Точка движется по закону $S(t) = 2t^3 + t - 1$ с ускорением через 1 секунду от начала движения равным:

а) 7 м/с^2; б) 2 м/с^2; в) 12 м/с^2; г) 0 м/с^2; д) не знаю

6. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает:

а) мгновенную скорость;
б) среднюю скорость изменения функции;
в) угловой коэффициент касательной;

г) не знаю.

7. Точка движется по закону $S(t) = 2t^3 - t^2 - 8$ с ускорением через 1 секунду от начала движения равным:

а) 9 м/с^2; б) 8 м/с^2; в) 1 м/с^2; г) 10 м/с^2; д) не знаю

8. Главной частью приращения дифференцируемой функции в точке x_0 является выражение:

а) $f(x_0)$; б) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; в) $f'(x_0) \cdot \Delta x$, $f'(x_0) \neq 0$ г) не знаю

9. Значение $f'(0)$ для функции $f(x) = \sqrt[5]{x}$ равно:

а) 0; б) -1; в) 1; г) $f'(0)$ не существует д) не знаю

10. Определенный интеграл – это:

а) функция; б) число в) семейство интегральных кривых
г) приращение первообразной д) не знаю.

Задание на дом: [1] , стр. 309-319 прочитать.

Практическая работа №15

По теме: «Вычисление и решение определенного интеграла в прикладных задач».

Цель: Отработать навыки и умения определенного интеграла к решению прикладных задач.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).

2. Изучение нового материала по теме: «Приложение определенного интеграла к решению прикладных задач». Отработать навыки и умения определенного интеграла к решению прикладных задач.

1.Первообразной для функции $f(x)=x^3$ является функция:

а) $\frac{x^4}{4}$ б) $\frac{x^4}{4}+2$ в) $\frac{x^4}{4}+c$ г) $3x^2$ д) $3x^2+c$

2. $\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{6}dx$ равен:

а) 6 sinx/6 б) 6 sinx/6+c в) 6 г) 3 д) 0

3. Первообразная функции – это:

а) число б) криволинейная трапеция

в) функция г) геометрическая фигура

4.Площадь фигуры, ограниченной линиями y=x, $x=2$, $x=4$ равна:

а) 6 кв.ед. б) 0 кв.ед. в) 5 кв.ед. г) 3 кв.ед.

5. Для функции $y=f(x)$ существует:

а) конечное число первообразных;

б) одна первообразная $F(x)$;

в) семейство интегральных кривых $F(x)+c$;

г) кривая, проходящая через начало координат;

д) бесконечное число первообразных; е) не знаю.

6. $\int_0^1 e^{2x}dx$ равен:

а) e^2 б) e^2-1 в) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ г) e^2+c д) $\frac{1}{2}(e^2+c)$

7. Пусть $f(x)=\sin x$, $F_1(x)=-\cos x$, $F_2(x)=-\cos x+c$, тогда первообразной для функции $f(x)$ является:

а) только $F_1(x)$ б) только $F_2(x)$

в)F_1(x) u F_2(x) г) нет ответа

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

а) $\int_a^b f(x)dx+c$ б) $\int f(x)dx$ в) $\int_a^b f(x)dx$ г) $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ д) не знаю

9. Определенный интеграл – это:

а) функция; б) число в) семейство интегральных кривых

г) приращение первообразной д) не знаю

10. $\int_0^1 x^7dx$ равен:

а) $\frac{1}{8}$ б) 8 в) 7 г) $7x^6+c$ д) $\frac{x^8}{8}+c$

11. Фигура ограниченная линиями $y=x$, $x=\frac{\pi}{2}$ и $y=\sin x$:

а) есть криволинейная трапеция;

б) не является криволинейной трапецией;

в) площадь вычисляется по формуле $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-x)dx$;

г) не знаю.

12. Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 9 - x^2$, равна:

а) 36 кв. ед. б) 18 кв. ед. в) 3 кв. ед. г) 54 кв. ед. д) 27 кв. ед.

13. $\int_0^2 (x^2 - 6x + 9)dx$ равен:

а) -*4* б) $6\frac{2}{3}$ в) *7* г) 82/3 е) не знаю

14. Допишите определение: «Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная прямыми $x = a, x = b$, неотрицательной кривой y = f(x) … ».

15. Объем тела вращения вычисляется по формуле $V = \int_a^b ((f)x)^2 dx$.

16. Длина кривой $y = f(x)$ вычисляется по формуле $l = \int_a^b \sqrt{1+\quad} dx$

Задание на дом: [1], стр. 295, №125, 128 решить.

Практическая работа №17

По теме: «Изучение и умение решения ДУ».

Цель: Отработать навыки и умения задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ).

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление пройденного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).
2. Изучение нового материала по теме: «Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ)». Отработать навыки и умения вычисление задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ).

Определение: Дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде $y' = g(x)h(y)$ или $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$.

Разнося переменные x и y и их дифференциалы в разные стороны такого уравнения, оно может быть записано в виде

$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$ (отсюда происходит название данного типа уравнения).

Можно дать следующую интерпретацию происхождения данного уравнения.

Пусть величина Z является с одной стороны функцией величины y, т.е. z=M(y). С другой стороны величина Z является функцией величины x, т.е. z=g(x). Например, если Z-объем выпуска продукции, то с одной стороны z зависит от величины y – объема основных фондов, с другой стороны z может рассматриваться зависимой от величины x – объема затрачиваемых трудовых ресурсов. Таким образом, через соотношения z=H(y) и z=G(x) одна из величин y или x представляется функцией другой величины x или, соответственно, y. Исходное дифференциальное уравнение отображает эту функциональную связь через дифференциалы функций H(y) и G(x), уравнивая их, т.е. dz=dH(y)=dG(x). Отсюда можно считать, что $\frac{1}{h(y)} = H'(y), g(x) = G'(x)$.

Таким образом, чтобы найти эту функциональную связь в виде y=y(x),x=x(y) или f(x,y)=0, надо проинтегрировать каждую из частей дифференциального уравнения, получая

$\int \frac{dy}{h(y)} = H(y) + c_1$, $\int g(x)dx = G(x) + c_2$ и затем приравнять их $H(y)+c_1=G(x)+c_2$ (имея в виду $z=H(y)+c_1$, $z=G(x)+c_2$, и затем z исключается). Вместо двух постоянных c_1 и c_2 обычно берется одна $c=c_2-c_1$, и тогда общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

H(y)=G(x)+c.

Если это возможно, из него одна из величин может быть представлена явно функцией другой y=y(x) или x=x(y).

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение, получаемое при моделировании процесса распространения информации о новом товаре

$$\frac{dx}{dt} = \frac{px(N-x)}{N}.$$

Данное уравнение, очевидно, относится к уравнению с разделяющимися переменными. Разнеся переменные x и t и их дифференциалы по разные стороны, уравнение запишем в виде

$$\frac{dx}{x(N-x)} = \frac{p}{N}dt \text{ или } \frac{dx}{x(x-N)} = -\frac{p}{N}dt.$$

Проинтегрируем каждую из сторон этого уравнения:

$$, \int \frac{-p\,dt}{N} = -\frac{p}{N}t + c_2 . \text{ или } \ln\left|\frac{x-N}{x}\right| = -pt + c,$$

приравнивая найденные интегралы, получаем

где $c=N(c_1-c_2)$. Отсюда далее $\left|\frac{x-N}{x}\right| = e^{-pt+c} = e^c \cdot e^{-pt} = \bar{c}e^{-pt}$, где $\bar{c} = e^c > 0$. Так как по смыслу задачи $0 < x \le N$, то $\left|\frac{x-N}{x}\right| = \frac{N-x}{x}$, и тогда $\frac{N-x}{x} = \bar{c}e^{-pt}$. Окончательно общее решение дифференциального уравнения получает вид

$$x = \frac{N}{1+\bar{c}e^{-pt}}, \text{ где } \bar{c} > 0.$$

Нетрудно проверить, что дискретной и огибающей кривых дифференциальное уравнение не имеет. Однако, беря крайние значения для $\bar{c}$ равные $\bar{c} = 0, \bar{c} = +\infty$, получаем кривые x=N и x=0, являющиеся решениями уравнения, но не особыми.

Пример 2. Возьмем дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x} \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

Данное уравнение – уравнение с разделяющимися переменными; разнося переменные в разные стороны, записываем уравнение в виде

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрирование левой и правой частей уравнения, дает общее решение вида $\ln|y| = -\ln|x| + \ln c$, где постоянная взята в виде lnc,c>0. Далее несложно преобразовать данное уравнение к виду

$yx = c'$ или $y = \frac{\bar{c}}{x}$, где постоянная $\bar{c}$ уже не имеет ограничений на знак.

Как видно получилось семейство гипербол.

Для нахождения **частного решения** необходимо:

Пусть из данного семейства интегральных кривых (гипербол) необходимо выделить кривую (решение) проходящую через точку М(1,1), т.е. выделить решение, удовлетворяющее начальному условию y(1)=1. Для этого в общее решение уравнения подставим значения x=1, y=1, и найдем, отвечающее искомой кривой, значение постоянной $\bar{c}$. Очевидно, это значение равно $\bar{c} = 1 \cdot 1 = 1$**. Следовательно, искомое частное решение определяется уравнением**

Yx=1 или $y = \frac{1}{x}$**.**

Пример 3. Рассмотрим уравнение $y'^2 - 1 = 0$. Разрешая его относительно y', получаем два уравнения $y'=1$ и $y'=-1$ или $\frac{dy}{dx} = 1$ и $\frac{dy}{dx} = -1$.

Оба являются с разделяющимися переменными и приводятся к виду dy=dx и dx=-dx. Интегрирование левых и правых частей уравнений дает следующие их общие решения y=x+c и y=-x+c.

Пример 4. Следующим уравнением возьмем уравнение $y'^2 y^2 + y^2 = 1$.

Разрешая его относительно y' получаем

$y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ или $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. разделяя переменные имеем

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx .$$

Найдем интегралы от левой и правой частей уравнения:

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \begin{bmatrix} t = 1-y^2 \\ dt = -2y\,dy \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + c_1 = -\sqrt{1-y^2} + c_1 .$$

$$\pm\int dx = \pm x + c_2 .$$

Приравнивая, интегралы и заменяя две постоянных на одну получаем, следующий вид общего решения уравнения

1 вариант

Решить следующие уравнения:

1. $(x+1)dx+(y+2)dy=0$
2. $(x-1)dy=(y+5)dx$
3. $(x^2+x^2y)dx=y^2dy$

Решить следующие уравнения и найти частное решение

4.

а) $\begin{cases}(y^2+1)dx=(x^2+1)dy \\ x=0,\ y=1\end{cases}$ б) $y'=\dfrac{2}{x}+x$, если y(2)=1

2 вариант

Решить следующие уравнения:

1. $y'+\dfrac{2}{x}y=x$
2. $y'+2x=0$
3. $y'-x=0$
4. $y'=y$

Решить следующие уравнения и найти частное решение

8. $\begin{cases}(y^2+4)dx=(x^2+9)dy \\ x=0,\ y=1\end{cases}$
9. $\begin{cases}y'=x+1 \\ x=0,\ y=2\end{cases}$
10. $y'=\dfrac{2}{x}+x$, если y(1)=0

3 Вариант

1. Решить следующие дифференциальные уравнения:

1) $y'' - y' - 12y = 0$

2) $y'' + 16y = 0$

3) $y'' + 2y' + y = e^{3x}$

2. Найти частное решение уравнения:

$y' + 2y = e^{-x}$, при x = 0 y = 0.

Задание на дом: [1], стр. 362, №21, 23 решить.

Практическая работа №18

По теме: «Изучение сходимости и расходимости рядов».

Цель: Повторить вид рядов. Закрепить знакопеременные ряды и решать примеры по алгоритму.

План урока

1. Организационный момент.
2. Повторение пройденного материала.
3. Закрепление пройденного материала
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).
2. Изучение нового материала по теме: «Знакопеременные ряды».

Повторить вид рядов. Закрепить знакопеременные ряды и решать примеры по алгоритму по алгоритму.

Ряд Дирихле. Знакопеременные ряды.

Мы убедимся, что известное утверждение: от перестановки слагаемых сумма не меняется — имеет свою границу.

Интегральный признак сходимости

ЗАДАЧА 1

Пусть дан ряд /(k), где / (k) ,з k=l

знакоположительная, невозрастающая функция. Показать, что если ему сопоставить не оо /(x) dx, то этот ряд и этот несобственный интеграл сходятся или расходятся одновременно.

► (По условию) задачи

/(k + 1) < /(£) < /(k), при £ е [k, k + 1].

Вопрос: Воспользовавшись теоремой о среднем (Лекция 28), представить / (£) в виде определённого интеграла.

Ответ:

k+1

J /(x) dx = /(£)(k + 1 - k) = /(£), при £ е [k, k + 1]. k

Вопрос: Как будет выглядеть исходное неравенство после его суммирования с учётом найденного обстоятельства?

k+1

Ответ: /(k + 1) < J /(x) dx < /(k)

k

4

E/(^ + 1) <E / fix) dx <E f(k)

k=1 k=l k k=l

те °? те

Ef (k + 1) W f (x) dx < E f (k)

k=l 1 k=l , 1 2

1. Пусть правый ряд сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, несобственный интеграл сходится.

2. Пусть несобственный интеграл сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1 , ряд сходится.

3. Пусть левый ряд расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1 , несобственный интеграл расходится.

4. Пусть несобственный интеграл расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, ряд расходится.

к Рядом Дирихле называется знакоположительный ряд— ряд Дирихле

• При а = 1 ряд Дирихле становится гармоническим. ЗАДАЧА 2

Исследовать на сходимость ряд Дирихле.

► Вопрос: Какой признак сходимости вы будете использовать ? Ответ: Интегральный признак сходимости, согласно которому

ряд тт/ и интеграл — dx сходятся или расходятся одновременно.

Вопрос: Что вы можете сказать о сходимости этого несобственного интеграла?

Ответ: Согласно частному предельному признаку сходимости для интеграла с неограниченным пределом интегрирования (Лекция 32) такой интеграл сходится при а > 1 и расходится при а < 1. 4

• В данной задаче доказано, что гармонический ряд расход-ся, причем логарифмически.

Пример 1. Подсчитать N-ую частичную сумму расходящегося гармонического ряда, если число слагаемых в нем равно числу атомов во вселенной.

> Вопрос: Чему равно число атомов во вселенной, если известно, что радиус вселенной равен десять миллиардов световых лет, а средняя плотность вещества во вселенной равна одному атому в кубическом сантиметре?

Ответ: N ~ 1084.

N 1 N dk

~ / у- = 1пЛГ = 1п1084 - 194 <

Знакопеременные ряды

★ Числовой ряд называется знакопеременным, если он содержит как положительные так и отрицательные слагаемые.

Признак Лейбница

ЗАДАЧА 3

Пусть знакопеременный ряд удовлетворяет следующим условиям:

— ряд знакочередующийся;

— ряд не возрастающий Uu+i < Uk;

— выполняется необходимое условие lim uu = 0.

k—oo

Показать, что в этом случае ряд сходится, причём его сумма не превышает первое слагаемое ul > 0.

► Если число слагаемых четно, то

S2n = Ui - U2 + U3 U2n-2 + U2n-1 - U2n =

= Ui-(u2-U3) (u2n-2 ~ U2n-l) ~U2n < Щ ==>

>0 >0

lim S2n < Ui.
n—oo
Вопрос: А если число слагаемых нечетно?
Ответ: Тогда воспользуемся необходимым условием
lim S2n+i = lim S2n + lim U2n+i = S < Ui.
n—o n—o n—o
=o
• Условия решённой задачи составляют признак Лейбница.

Абсолютная и условная сходимость

к Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его слагаемых.

к Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, ес¬ли он сходится (например, по признаку Лейбница), но ряд из модулей его слагаемых расходится.

. **Функциональные ряды**

Подобно тому, как для функции мы интересуемся областью ее определения, так для функционального ряда нас должна интересовать его область сходимости.

к Функциональным рядом называется такой ряд

E uk{%) = щ(x) + и2(ж) H Ь ип(x) H ,
k=l
каждое слагаемое которого является функцией x.

к Функциональный ряд называется сходящимся в области D, если существует конечный предел частичной суммы его, т.е.
lim Sn(x) = S(x) при Mx £ D.
га—oo

к Множество всех значений x, при которых ряд сходится, называют областью сходимости.

к Функциональный ряд называется равномерно сходящимся в области D, если Ve > 0 найдется такое N, что выполняется неравенство

\Sn(x) — S(x)\ < e при n > N,

где N не зависит от x.

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса

те

Функциональный ряд~*y^^ uk (x) сходится равномерно при x £ D,

k=1

если ему можно сопоставить сходящийся знакоположительный

те

числовой ряд Vk, такой, что выполняется |uk (x)| < Vk. k=1

ЗАДАЧА 1

Применить признак сходимости Даламбера для функционального ряда.

► Сопоставим функциональному ряду ряд из модулей его чле-

нов те те

J2Uk(ж) E lUfc

к=1 k=1

Такой ряд для каждого конкретного x является знакоположительным числовым рядом к которому применим признак Даламбера

lim < 1.

к—те |Ufe (x)|

При всех значениях x, когда предел меньше единицы, функциональный ряд сходится, причём абсолютно, а само множество этих значений x является его областью сходимости. <

Область сходимости степенного ряда

к Если Uk (x) = (ikxk, то ряд называется степенным.

ЗАДАЧА 2

Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найти об¬ласть сходимости степенного ряда.

► По условию задачи Uk(x) = a&xk, и тогда

У |Uk+1(x)| |afc+ixfc+1| |afe+i|
lim —:—гтг < 1 => lim —: — < 1 => \x\ lim ——— < 1,
fc—те |Ufc (x)| fc—те |afc xk| fc—те |((k |
R
| x | < lim
к—те
откуда следует
((к
ак+1
радиус сходимости по Даламберу
• В интервале (-R, R) степенной ряд сходится абсолютно.
Пример 1. Исследовать на сходимость ряд xk.
k=0
R = lim
k
> 1. Находим радиус сходимости степенного ряда
ak
lim - = 1.
k1
I ak+1
2. На границах области сходимости проводим дополнитель¬ное исследование
oo
E(±1)k = 1 ± 1 + 1 ± • • • — расходится.
k=0
Вопрос: Не напоминает ли вам что-нибудь этот степенной ряд?
Ответ: Но сути это ряд геометрической прогрессии, который, как еще раз мы установили, абсолютно сходится при x £ (—1, 1), и расходится при |x| ^ 1. <

ЗАДАЧА 3
Получить радиус сходимости степенного ряда, используя при¬знак сходимости Коши.

► Вопрос: Как будет выглядеть признак Коши для функционального ряда?

Ответ: lim {/ |uk (x)| < 1.

k—oo »

Для степенного ряда то же неравенство принимает вид:

lim \ и(x^ < 1 == lim a\akxk| < 1 ==> |x| lim {/|ak| < 1,

k—oo " k—oo " k—oo "

откуда следует

\x\ < lim = R

k—o k\ak| радиус сходимости по Коши

Разложение функций в степенные ряды

Вопрос: Чему равна эквивалентная функции в окрестности точки x0, если функция в этой точке n раз дифференцируема?

Ответ: Многочлену Тейлора (Лекция 21).

к Пусть функция f (x) бесконечное число раз дифференцируема в точке xo и |f (k)(xo)| < M, тогда в окрестности этой точки функция раскладывается в степенной ряд Тейлора

y/(fc) (0b f(x)

ряд Маклорена

Вопрос: Как выглядит ряд Тейлора при xo = 0? Ответ:

Пример 2. Разложить ex в ряд Маклорена и исследовать его на сходимость.

1. f(k)(0) = (ex)(k) ,x=0 = e, x=0, 1 => ex = E, k=0, kx

2. R = lim k (k + 1)!

lim ——- = lim (k + 1) = oo, k, xk

k—oo k! k—oo

Ответ: ex = ^ —, при D : (—oo, oo).

k=o

Пример 3. Разложить sin x в ряд Маклорена и исследовать его на сходимость (самостоятельно).

oo

x2n+1>   Ответ: ^x = ^{-1T^—^,   при D.

Теория рядов.

Сходимость и сумма числового ряда

Из этой лекции станет ясно, что не всякая сумма бесконечного числа слагаемых равна бесконечности.

к Формальная сумма элементов ui, u2, ..., un, ... числовой последовательности называется числовым рядом, = Ui + U2 +   + Un +

числовой ряд, при этом слагаемые называют членами ряда, а un — общим членом ряда.

к Сумма первых n слагаемых ряда называется n-ой частичной суммой

Sn =   Uk = Ui + U2 +   + Un

n-ая частичная сумма

к Если все члены ряда положительны, то ряд будем называть знакоположительным.

к Если предел частичных сумм существует и конечен, то ряд называется сходящимся, в противном случае говорят, что ряд расходится.

lim Sn = S- сумма ряда

Ряд геометрической прогрессии

к Рядом геометрической прогрессии называется следующий ряд

aqn = a + aq + aq2 + • • • + aqn +

n=0, где q- знаменатель геометрической прогрессии.

ЗАДАЧА 1

Показать, что n-ая частичная сумма ряда геометрической прогрессии равна Sn = a + aq + aq2 + • • • + aqn 1, 1 a — aqn, q

► Доказательство этой формулы проводится методом математической индукции, но еще проще ее можно получить прямым делением

a — aqn a — aq

a

1—q

aq + • • • + aqn 1

aq— aqn aq— aq2

aqn 1 — aqn, aqn~l —aqn

ЗАДАЧА 2

Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда геометрической прогрессии 1 + q + q2 + ••• + qn + ••• .

► 1. |q| < 1 => сходится.

—

=o

1 - qn 1 qn 1

n

lim Sn = lim = lim

n—oo 1 — q 1 — q n—oo 1 — q 1 — q

s 1

1—q- сумма ряда геометрической прогрессии

2. |q| > 1 => расходится.

1 — qn 1 qn

lim Sn = lim = lim = oo.

n—oo n—oo 1 — q 1 — q n—oo 1 — q

=oo

3. q = 1 => расходится.

Sn = 1 + 1 + ••• + 1 = n; lim Sn = lim n = ж.

4. q = —1 ==> расходится.

Sn = 1 — 1 + • • • ± 1 = 0 или 1; lim Sn не существует <

4 ^ ' n^oo, n. Необходимое условие сходимости числового ряда.

ЗАДАЧА 3

Показать, что если ряд сходится, то lim un = 0.

n—o

► По условию задачи lim Sn = S, но тогда

n—o

lim Sn_i = S.

n—>oo n—1—>o

Вопрос: Какое соотношение связывает Sn и Sn_ 1 ?

Ответ: Sn = Sn-i + un-

lim Sn = lim Sn_ i + lim un ==> S = S + lim un ==>

lim un = 0

необходимое условие сходимости <o

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд ^ n + 1

t 1000n

П + 1 1

> lim un = lim ,nnn = —— ф 0 — расходится < n—oo n—oo

1000П 1000

Гармонический ряд

к Гармоническим рядом называется числовой ряд

^ 111 1

]Г- = 1+ - + - + ••• + -+

Z—' П 2 3 П

n=i

Вопрос: Что вы можете сказать о сходимости гармонического ряда?

Ответ: Только невыполнение необходимого условия сходимости позволяет делать определенный вывод, а его выполнение, как в данном случае, lim un = lim 1/n = 0, не позволяет судить о

n—oo n—oo

сходимости.

• В дальнейшем мы сможем показать, что этот ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости

Вопрос: Как вы думаете, для чего нужны достаточные призна¬ки сходимости числовых рядов?

Ответ: Прежде чем вычислять сумму ряда, необходимо убедиться, что он сходится. Иначе большие усилия можно затратить на вычисление того, чего не существует.

Признак сравнения

ЗАДАЧА 4

Пусть заданы два числовых ряда щ (1) и ^ Vk (2) и пусть
o
и ^ Vk (2) и .
k=1 k=1
Uk ^ Vk ^ 0. Показать, что тогда из сходимости ряда (1) сле-дует сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

n n n n
► Uk > Vk => У2 Uk ^ У Vk => lim V Uk > lim V Vk.
nn
k=1 k=1 k=1 k=1
1. Если ряд (1) сходится, то

lim У" Uk = S ;s lim У Vk
nn
k=1 k=1
что означает сходимость ряда (2). 2. Если ряд (2) расходится, то

lim У Uk ^ lim У Vk = oo ,
nn
k=1 k=1 что означает расходимость ряда (1). ^

o1
Пример 2. Исследовать на сходимость ряд У —.
nn
n=1

о 1 1 1 1
> Распишем этот ряд > — = 1 + тт? + т^Н Ь — +
n=1
Вопрос: С каким рядом данный ряд вы думаете сравнивать? о1
Ответ: С рядом геометрической прогрессии. Поскольку
2n, n=1

Абсолютная и условная сходимость

к Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его слагаемых.

к Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, ес¬ли он сходится (например, по признаку Лейбница), но ряд из модулей его слагаемых расходится.

00 (—1)n
Пример 2. Исследовать на сходимость ряд У — .
z—' n In n

> 1. Вопрос: Удовлетворяет ли этот ряд признаку Лейбница? Ответ: Да, он удовлетворяет всем треем его условиям.

2. Проверим, сходится ли ряд из модулей его слагаемых
со Ь
1 dx dx
2
n=2
— => / — = lim / —■ = mm ж I = оо.
„ П In П J X In X Ь—оо J x In x= 22

Показать на примере знакочередующегося ряда (—1)k 11
что сумма условно сходящегося ряда зависит от порядка суммирования слагаемых этого ряда.

Переставим члены ряда и сгруппируем их по трое с 1
1 1
2 + 3
11

4 + 5 11
6 + 718+11+6118+110 112+5(1-5)1(1-1) 2 V я 4/1(1-1) 2 V 5 6 /11+
2n - 1 An- 4n / 2-V ' k=4i, 12^2n-1 2n)

• От перестановки слагаемых сумма условно сходящегося ряда меняется, а сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется.

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов позво¬ляет заданные ряды сводить к уже известным рядам, напри¬мер, вычислить сумму такого ряда: 1+2-о.з+з-(о.з)2 +4-(о.з)3+••• .

ЗАДАЧА 1 (об интегрировании рядов) Пусть ряд
те
E uk(ж) = S(x) при x G [a, b] (1) k=i
равномерно сходится. Показать, что в этом случае ряд
те
vk(x) = V(x) при x G [a, b] (2)
k=1
будет сходиться, если
x x
vk(x) = J uk (t) dt, причём V(x) = J S(t) dt.
a a

► Поскольку ряд (1) сходится, то
lim Sn(x) = S(x) ==> \Sn(x) — S(x)\ < -—-—,
n—oob — a
при этом, согласно определению равномерной сходимости, e не зависит от x при n > N. Покажем, что
|Vi(x) — V(x)| < e при n> N, x G [a, b].

Вопрос: Чему равна n-ая частичная сумма ряда (2)?
Ответ:
n n x x n x
Vn(x) =]Г vk(x) = Y,j uk(t) dt = J Y. uk(t) dt = J Sn(t) dt.
k=1 k=1 aa k=1 a

Вопрос: Какую цепочку соотношений теперь нужно записать? Ответ:
x x x

J Sn(t) dt — j S(t) dt = J(Sn(t) — S(t)) dt <
a a a
x x
< /\Sn(t) - S(t)\dt< f -/—dt = —— (x - a) < e. <
b — a b — a
aa
(0.3)2 (0.3)3

3. Вопрос: Какому степенному ряду он всего ближе? Ответ: Ряду геометрической прогрессии xk
k=0
1 + x + x2 + x3 +1—x, который равномерно сходится при |x| < r < 1.
Вопрос: Можно ли преобразовать ряд геометрической прогрессии к заданному ряду?
Ответ: Да, это можно сделать посредством интегрирования.
1 dt + t dt + t2 dt +23xxЖ+T + У +0 0 04— ln |1 — x|
Ответ: V(0.3) = — ln ^ — 0.3| = — ln0.7 к 0.35 <
Пример 2. Разложить в степенной ряд arctg x для |x| < 1.
> Вопрос: Можно ли arctg x записать в виде определённого интеграла?
x
Ответ: Да, причём / ~ dt = arctg ж .
J 1 +t2 o
Вопрос: Можно ли подынтегральное выражение представить в виде ряда?
Ответ: Подынтегральное выражение — это сумма ряда геометрической прогрессии с q = —x2:
-. oo те
—Ч = E(-ж2)^ = Et-1)**2* = 1 - ж2+ж4 - • • •.
1 + x2 k=o k=o
Вопрос: Можно ли проинтегрировать этот ряд?
Ответ: Да, поскольку ряд геометрической прогрессии равномерно сходится при |x| < r < 1.
X o o x2k+1 x3

агс,ёж = jYJ{-l)kt2kdt = YJ{-y^—l =х-Х- + ---. <
о k=o k=o
ЗАДАЧА 2 (о дифференцировании рядов) Пусть задан ряд
о
E uk(x) = S(x) при x £ [a, b] (1) k=1 и пусть ряд из его производных Wk (x) = uk(x)oEwk(x) = W(x) при x £ [a, b] (2) k=1 равномерно сходится. Показать, что S'(x) = W (x).
►	Поскольку ряд (2) равномерно сходится, то его можно, согласно Задачи 1 проинтегрировать, причём
Y / wk(t) dt = Y (ufc(x) - uk(a)) =
k=1 a k=1
x
= S(x) - S(a) = J W(t) dt => S'(x) = W(x). <a

Пример 3.	Вычислить: 1 + 2 • 0.3 + 3 • (0.3)2 +4 • (0.3)3 +	.
>	1. Сопоставим заданному числовому ряду степенной ряд.
те
1 + 2 • x + 3 • x2 + 4 • x3 + ••• = E(k + 1)xk (x = 0.3).
k=1
2.	Очевидно, что ряд сходится при |x| < 1.
3.	Вопрос: Можно ли преобразовать ряд геометрической прогрессии к заданному ряду?
Ответ: Да, посредством дифференцирования.
(1 + ж + ж2 + ж3+ •••)'	= (£ж*^ = (ьГТ") 'те 11 + 2-ж + 3-ж2Н	=
^Гкхк~1=-	гтг.
k=i	(1 - x)2
Ответ: W(0.3) =	= ^ «2.04 <
x
Пример 4.	Выразить интеграл вероятности	J e-t dt в виде степенного ряда.
X	2	Г	2	те	t2k ^	те x2k+i
Задание на дом: подготовиться к/работе.

Практическая работа №19

По теме: «Нахождение сходимости и расходимости рядов».

Цель: Закрепить тему: «Ряды».

План урока

1. Организационный момент.

2. Изучение нового материала.

3. Закрепление изученного материала.

4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).

2. Изучение нового материала по теме: «Выполнение примеров по алгоритму». Закрепить тему: «Ряды».

Теория рядов

. Сходимость и сумма числового ряда

Из этой лекции станет ясно, что не всякая сумма бесконечного числа слагаемых равна бесконечности.

к Формальная сумма элементов ui, u2, ..., un, ... числовой последовательности называется числовым рядом, = Ui + U2 + + Un +

числовой ряд, при этом слагаемые называют членами ряда, а un — общим членом ряда.

к Сумма первых n слагаемых ряда называется n-ой частичной суммой

Sn = Uk = Ui + U2 + + Un

n-ая частичная сумма

к Если все члены ряда положительны, то ряд будем называть знакоположительным.

к Если предел частичных сумм существует и конечен, то ряд называется сходящимся, в противном случае говорят, что ряд расходится.

lim Sn = S- сумма ряда

Ряд геометрической прогрессии

к Рядом геометрической прогрессии называется следующий ряд

aqn = a + aq + aq2 + • • • + aqn +

n=0, где q- знаменатель геометрической прогрессии.

ЗАДАЧА 1

Показать, что n-ая частичная сумма ряда геометрической прогрессии равна Sn = a + aq + aq2 + • • • + aqn 1, 1 a — aqn, q

► Доказательство этой формулы проводится методом математической индукции, но еще проще ее можно получить прямым делением

a — aqn a — aq

a

1—q

aq + • • • + aqn 1

aq— aqn aq— aq2

aqn 1 — aqn, aqn~l —aqn

ЗАДАЧА 2

Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда геометрической прогрессии 1 + q + q2 + ••• + qn + ••• .

► 1. |q| < 1 => сходится.

—

=o

1 - qn 1 qn 1

n

lim Sn = lim = lim

n—oo 1 — q 1 — q n—oo 1 — q 1 — q

s 1

1—q- сумма ряда геометрической прогрессии

2. |q| > 1 => расходится.

1 — qn 1 qn

lim Sn = lim = lim = oo.

n—oo n—oo 1 — q 1 — q n—oo 1 — q

=oo

3. q = 1 => расходится.

Sn = 1 + 1 + ••• + 1 = n; lim Sn = lim n = ж.

4. q = —1 ==> расходится.

Sn = 1 — 1 + • • • ± 1 = 0 или 1; lim Sn не существует <

4 ^ ' n^oo, n. Необходимое условие сходимости числового ряда.

ЗАДАЧА 3

Показать, что если ряд сходится, то lim un = 0.

n—о

► По условию задачи lim Sn = S, но тогда

n—о

lim Sn_i = S.

n—>oo n—1—>o

Вопрос: Какое соотношение связывает Sn и Sn_ 1 ?

Ответ: Sn = Sn-i + un-

lim Sn = lim Sn_ i + lim un ==> S = S + lim un ==>

lim un = 0

необходимое условие сходимости <о

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд ^ n + 1

t 1000n

П + 1 1

> lim un = lim ,nnn = —— ф 0 — расходится < n—оо n—оо
1000П 1000

Гармонический ряд

к Гармоническим рядом называется числовой ряд

^ 111 1

]Г- = 1+ - + - + ••• + -+

Z—' П 2 3 П

n=i

Вопрос: Что вы можете сказать о сходимости гармонического ряда?

Ответ: Только невыполнение необходимого условия сходимости позволяет делать определенный вывод, а его выполнение, как в данном случае, lim un = lim 1/n = 0, не позволяет судить о

n—oo n—oo

сходимости.

• В дальнейшем мы сможем показать, что этот ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости

Вопрос: Как вы думаете, для чего нужны достаточные призна¬ки сходимости числовых рядов?

Ответ: Прежде чем вычислять сумму ряда, необходимо убедиться, что он сходится. Иначе большие усилия можно затратить на вычисление того, чего не существует.

Признак сравнения

ЗАДАЧА 4

Пусть заданы два числовых ряда щ (1) и ^ Vk (2) и пусть

о

и ^ Vk (2) и .

k=1 k=1

Uk ^ Vk ^ 0. Показать, что тогда из сходимости ряда (1) сле-дует сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

n n n n

► Uk > Vk => У2 Uk ^ У Vk => lim V Uk > lim V Vk.

nn

k=1 k=1 k=1 k=1

1. Если ряд (1) сходится, то

lim У" Uk = S ;s lim У Vk

nn

k=1 k=1

что означает сходимость ряда (2). 2. Если ряд (2) расходится, то

lim У Uk ^ lim У Vk = оо ,

nn

k=1 k=1 что означает расходимость ряда (1). ^

o1

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд У —.

nn

n=1

о 1 1 1 1

> Распишем этот ряд > — = 1 + тт? + т^Н Ь — +

n=1

Вопрос: С каким рядом данный ряд вы думаете сравнивать? o1

Ответ: С рядом геометрической прогрессии. Поскольку

2n, n=1

Задание на дом:[3] , до решать примеры в тетрадях

Практическая работа №20

По теме: «Изучение и вычисление задачи числовых характеристик случайной величины с использованием элементов комбинаторики».

Цель: Отработать умение и навыки вычисления комбинаторики.

План урока

1. Организационный момент.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление изученного материала.
4. Задание на дом.

Ход урока

1. Организационный момент (Посещаемость, д/з).

2. Изучение нового материала по теме: «Выполнение решения задач по алгоритму. Отработать умение и навыки вычисления комбинаторики

Размещения, перестановки, сочетания.

Пусть у нас есть множество из трех элементов , $\{a, b, c\}$. Какими способами мы можем выбрать из этих элементов два? ab, ac, bc, ba, ca, cb.

Определение. Размещениями множества из nразличных элементов по m элементов $(m \leq n)$называются комбинации, которые составлены из данных

n элементов по m элементов и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число всех размещений множества из n элементов по m элементов обозначается через A_m^n (от начальной буквы французского слова "arrangement", что означает размещение), где $n = 1, 2, \ldots$ и $m = \overline{1, n}$.

Теорема. Число размещений множества из n элементов по m элементов равно

$$\mathsf{A}_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

Доказательство. Пусть у нас есть элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ — возможные размещения. Будем строить эти размещения последовательно. Сначала определим a_{i1} — первый элемент размещения. Из данной совокупности n элементов его можно выбрать n различными способами. После выбора первого элемента a_{i1} для второго элемента a_{i2} остается $n-1$ способов выбора и т.д. Так как каждый такой выбор дает новое размещение, то все эти выборы можно свободно комбинировать между собой. Поэтому имеем:

$$\mathsf{A}_n^m = n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1).$$

Пример. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:

$$\mathsf{A}_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$$

Определение. Перестановкой множества из n элементов называется расположение элементов в определенном порядке.

Так, все различные перестановки множества из трех элементов $\{a, b, c\}$— это

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Очевидно, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$.

Число всех перестановок из nэлементов обозначается P_n(от начальной буквы французского слова “permutation”, что значит “перестановка”, “перемещение”). Следовательно, число всех различных перестановок вычисляется по формуле

$$\mathsf{P}_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Искомое число расстановки 8 ладей

$$\mathsf{P}_8 = 8! = 40320.$$

n	$n!$	n	$n!$
0	1	6	720
1	1	7	5040
2	2	8	40320
3	6	9	362880
4	24	10	3628800
5	120		

$0! = 1$по определению!

Определение. Сочетаниями из nразличных элементов по kэлементов называются комбинации, которые составлены из данных nэлементов по k

элементов и отличаются хотя бы одним элементом (иначе говоря, k-элементные подмножества данного множества из nэлементов).

Как видим, в сочетаниях в отличие от размещений не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из nэлементов по kэлементов в каждом обозначается C_n^k(от начальной буквы французского слова "combinasion", что значит "сочетание").

Числа C_n^k

$C_5^2 = 10$

Все сочетания из множества $\{a, b, c, d, e\}$по два — $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$.

$C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n$.

Свойства чисел C_n^k

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Действительно, каждому k-элементному подмножеству данного n элементного множества соответствует одно и только одно $n-k$-элементное подмножество того же множества.

2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Действительно, мы можем выбирать подмножества из kэлементов следующим образом: фиксируем один элемент; число k-элементных подмножеств, содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^{k-1}; число k-элементных подмножеств, не содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^k.

Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
$$

...

В этом треугольнике крайние числа в каждой строке равны 1, а каждое не крайнее число равно сумме двух чисел предыдущей строки, стоящих над ним. Таким образом, этот треугольник позволяет вычислять числа C_n^k.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

...

$C_7^3 = 35; C_8^6 = 28$.

Теорема. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (0 \leq k \leq n)$

Доказательство. Рассмотрим множество из nэлементов и решим двумя способами следующую задачу: сколько можно составить последовательностей из kэлементов данного множества, в каждой из которых никакой элемент не встречается дважды?

1 способ. Выбираем первый член последовательности, затем второй, третий и т.д. член

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

2 способ. Выберем сначала kэлементов из данного множества, а затем расположим их в некотором порядке

$$\mathsf{C}_n^k \cdot k!,$$

$$\mathsf{C}_n^k \cdot k! = n(n-1)\ldots(n-k+1),$$
$$\mathsf{C}_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

До множим числитель и знаменатель этой дроби на $(n-k)!$:

$$\mathsf{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\mathsf{C}_{20}^8 = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 323\cdot 390 = 125970.$$

Пример. Сколькими способами можно в игре “Спортлото” выбрать 5 номеров из 36?

Искомое число способов
$$\mathsf{C}_{36}^5 = \frac{36!}{5!31!} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 376992.$$

Задачи.

1. Номера машин состоят из 3 букв русского алфавита (33 буквы) и 4 цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?
2. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?
3. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5?
4. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана?

5. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?
6. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?
7. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?
8. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?
9. Сколькими способами можно расставить в ряд числа $1, 2, \ldots, n$ так, чтобы числа $1, 2, 3$ стояли рядом и притом шли в порядке возрастания?
10. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую цифру можно использовать только один раз?
11. Из слова РОТ перестановкой букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова ЛОГАРИФМ?
12. Назовем *разбиением* натурального числа представление его в виде суммы натуральных чисел. Вот, например, все разбиения числа 4:

$4; 3+1; 1+3; 2+2; 2+1+1; 1+2+1; 1+1+2; 1+1+1+1.$

Разбиения считаются разными, если они отличаются либо числами, либо порядком слагаемых.

Сколько существует различных разбиений числа 11 на 4 слагаемых?
13. Сколько существует трехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?
14. Сколько существует четырехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?
15. Сколькими способами можно рассадить в ряд 17 человек, чтобы A и B оказались рядом?
16. n девочек и n мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из $2n$ мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы никакие две

девочки не сидели рядом?

17. nдевочек и nмальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из $2n$мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы все девочки сидели рядом?

Задание на дом: итоговое занятие.

Основные источники:

1. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика в задачах с решениями: Учебное пособие. 3-е изд., стер. - СПб,: Издательство "Лань", 2011. - 464 с.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для техникумов.- 3-е изд.- М.: Высшая школа, 1990.- 495с.Дополнительные источники:

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие.изд. 12-е. – М.: Высшая школа, 2006 – 476 с.
2. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика: Учебник для студентов СПО.- 2-е изд. – М.: Академия, 2006. – 368 с.

Электронные ресурсы:

1. Официальный информационный портал ЕГЭ: http://www.ege.edu.ru (дата обращения: 27.09.2013).
2. Федеральный институт педагогических измерений: http://www.fipi.ru (дата обращения: 27.09.2013).